Оцінки похибок наближення класів неперервних диференційованих функцій ламаними

Олександр Щитов
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1435-2918
НВК-ліцей №100, Дніпро, Україна

Микола Мормуль
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8036-3236
Університет митної справи та фінансів, Дніпро, Україна

Вступ

Нехай $C \equiv C[0,1]$ – простір неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_C = \max\{|f(t)|: t \in [0,1]\}$. Позначимо через Φ безліч парних, кінцевих, неспадних на півсегменті $[0,\infty)$ функцій $\varphi(x)$, які задовольняють умовам $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \varphi(\infty) = \infty$. Якщо $\varphi(x) \in \Phi$, то через $\varphi(L)$ позначимо множину усіх вимірних на відрізку $\in [0,1]$ функцій $f(t)$, для кожної з яких $\|f\|_{\varphi(L)} = \int_0^1 \varphi(f(t))\,dt < \infty$.

Якщо, наприклад, $\varphi(x) = |x|^p$ $(1 \le p < \infty)$, то $\varphi(L)$ є $L_p = L_p[0,1]$ – нормований простір функцій, інтегрованих в p-тій степені, і $\|f\|_{\varphi(L)}$ в цьому випадку є p-а степінь норми $\|f\|_{L_p}$, де

$$\|f\|_{L_p} = \left\{\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}. \qquad (1)$$

Якщо $0 < p < 1$, то величина (1) не є нормою, але ми зберігаємо позначення і в цьому випадку. При $0 < p < 1$ клас L_p є метричним простором, в якому метрику можна задати рівнянням

$$\rho(f,g) = \|f-g\|_{L_p}^p.$$

Модулем неперервності функції $f \in C$ називають величину $\omega(f,t) = sup\{|f(\tau_1) - f(\tau_2)|: \tau_1, \tau_2 \in [0,1], |\tau_1 - \tau_2| \le t\}$.

Через $W^r H_\omega[a,b]$ $(r \in Z_+, a < b)$ позначимо клас *r* разів неперервно диференційованих на відрізку $[a,b]$ функцій $f(t)$, що у них модуль неперервності *r*-ї похідної $\omega(f^{(r)},t)$ $(f^{(0)}(t) \equiv f(t))$ не перевершує заданого модуля неперервності $\omega(t)$, $0 \le t \le b-a$.

Покладемо $W^r H_\omega \equiv W^r H_\omega[0,1]$, $H_\omega[a,b] \equiv W^0 H_\omega[a,b]$, $H_\omega \equiv H_\omega[0,1]$.

Через $W^r H_\omega^*$ позначимо клас 1-періодичних функцій $f(t) \in W^r H_\omega$.

У подальшому нам буде потрібна функція

$$\Omega_r(\omega,t) = sup\{max\{|f(x+t)-f(x)| : x\} : f \in W^r H_\omega^*\},$$

точне значення якої при кожному $r \in Z_+$ і опуклому вгору модулі неперервності $\omega(t)$ знайдено М. П. Корнійчуком в [1]. Зокрема встановлено, що для $0 \le t \le 1$ и $r = 2\nu$ $(\nu \in N)$

$$\Omega_{2\nu}(\omega,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2\nu-1} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1}\sin((2k+1)\pi t)}{(2k+1)^{2\nu}},$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/4} \omega(2t)\sin(k2\pi t)\,dt. \qquad (2)$$

Відзначимо, що $\Omega_0(\omega,t) \equiv \omega(t)$ для $0 \le t \le 1/2$. Функція $\Omega_r(\omega,t)$ $(r \in Z_+)$ має наступні властивості [2]:

1) $\Omega_r(\omega,t)$ монотонно зростає на $(0,1/2)$;
2) $\max\limits_{0\le t\le 1} \Omega_r(\omega,t) = \max \Omega_r(\omega,1/2)$;
3) $\Omega_r\left(\omega,\frac{1}{2}+t\right) = \Omega_r\left(\omega,\frac{1}{2}-t\right)$, $0 \le t \le 1/2$.

На відрізку $[0,1]$ введемо рівномірне розбиття $t_i = i/n$ $(i = \overline{0,n})$ і замінимо функцію $f(t)$ ламаною $\sigma_n(f,t)$, яка її інтерполює і є лінійною на кожному відрізку $[t_{i-1},t_i]$ $(i = \overline{1,n})$ і $\sigma_n(f,t_i) = f(t_i)$, $(i = \overline{0,n})$. Якщо $f(t)$ є абсолютно неперервною функцією на відрізку $[0,1]$, то при $t_{i-1} < t < t_i$ $(i = \overline{1,n})$ маємо

$$\sigma_n^{(1)}(f,t) = \Psi_n(f^{(1)},t), \text{ де } \Psi_n(g,t) = n\int_{t_{i-1}}^{t_i} g(\tau)d\tau.$$

Огляд джерел

Основні результати з тематики кусково-сталого наближення функцій належать М. П. Корнійчуку. Деякі з отриманих ним результатів можна знайти у роботі [3]. У роботах [4–6] О. В. Черницька досліджувала кусково-стале наближення функцій однієї змінної у просторах Орлича.

У роботі В. Н. Малоземова [7] знайдено точні верхні грані величини $\|f-\sigma_n(f)\|_C$ на класах H_ω и W^1H_ω для опуклого вгору модуля неперервності $\omega(t)$. В. Ф. Сторчай [8] отримав точну оцінку величини $\|f-\sigma_n(f)\|_{L_p}$ $(1 \le p < \infty)$ на класі H_ω при тех самих обмеженнях на функцію $\omega(t)$.

У випадку довільного модуля неперервності А. С. Логінов [9] знайшов точну оцінку величини $\|f-\sigma_n(f)\|_C$ на класах H_ω, а В. Н. Малоземов [10] обчислив точну верхню грань величини $\left\|f^{(1)}-\sigma_n^{(1)}(f)\right\|_C$ на класі функцій W^1H_ω.

У роботах М. П. Корнійчука [11] та С. А. Бельського [12] містяться результати про кусково-стале наближення класів функцій n-змінних, які визначені через модулі неперервності.

У роботах [13–19] також вивчались апроксимаційні властивості кусково-сталих функцій у різноманітних просторах.

Матеріали та методи

Метою дослідження поставимо отримати оцінки наближення 1-періодичних функцій з класів $W^{2\nu+1}H_\omega^*$ $(\nu \in N)$, де $\omega(t)$ – опуклий вгору модуль неперервності, такими функціями:

а) інтерполюючими функціями $f(t) \in W^{2\nu+1}H_\omega^*$ на множині точок $t_i = i/n$ $(i = \overline{0,n})$;

б) кусково-сталими функціями $\sigma_n(f,t)$ в інтегральній метриці L_p $(0 < p$;

в) кусково-сталими функціями $\sigma_n(f,t)$, $n = 2m$ $(m \in N)$ у рівномірній метриці.

Після чого зробимо висновки щодо точності оцінок похибок отриманих наближень.

Введемо наступні допоміжні функції:

$$\lambda(\omega; a, b; t) = \frac{1}{2}\begin{cases} \omega(a+b-2t), & \text{якщо } a \le t \le \frac{a+b}{2}, \\ -\omega(2t-a-b), & \text{якщо } \frac{a+b}{c} \le t \le b; \end{cases} \tag{3}$$

$$L(\omega; a, b; t) = \int_a^t \lambda(\omega; a, b; \tau)d\tau \ \ (a \le t \le b). \tag{4}$$

М. П. Корнійчук [20] показав справедливість наступної теореми.

Теорема А. Яким би не був модуль неперервності $\omega(t)$ для будь-якої функції $f \in W^1H_\omega$ справедливі нерівності

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{L_p}^p \le \int_0^{1/n} |L(\omega; 0{,}1/n; t)|^p dt \ (p > 0). \tag{5}$$

У випадку опуклого вгору модуля безперевності $\omega(t)$ оцінка (4) є непокращуваною на класі W^1H_ω, а при *n* парному – і на класі $W^1H_\omega^*$.

Зміст даної роботи зв'язаний зі своєрідним поширенням результата теореми А на класи $W^{2\nu+1}H_\omega^*$ і більш загальні простори $\varphi(L)$ з використанням величини $\Omega_{2\nu}(\omega, t)$, заданої у (2).

Результати

Для початку висунемо та доведемо наступну теорему.

Теорема 1. Нехай функція $\varphi(x) \in \Phi$ неперервна і монотонно зростає на $[0, \infty)$, $\omega(t)$ є опуклий вгору модуль неперервності. Тоді для будь-якої функції $f \in W^{2\nu+1}H_\omega^*$ $(\nu \in N)$ і $n = 2, 3, \dots, \infty$ справедлива нерівність

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{\varphi(L)} \leq n \int_0^{1/n} \varphi\left(\frac{1}{2}\int_0^x \Omega_{2\nu}(\omega, 2t - 1/n)dt\right) \mathrm{dx}\,, \tag{6}$$

непокращувана для $n = 2m$ $(m \in N)$ на всьому класі $W^{2\nu+1}H_\omega^*$.

Доведення теореми 1.

Нам потрібна низка допоміжних результатів, які, у певному сенсі, є поширенням лем 5.2.7 і 5.2.8 з [21, с.230-231] на випадок класів $W^r H_\omega^*$ та простору $\varphi(L)$. Для цього нагадаємо деякі визначення та поняття, зв'язані з перестановками функцій [22].

Нехай $f(t)$ є сумованою на відрізку $[a, b]$ функцією і при будь-якому фіксованому $y \geq 0$ $l_y(f) = \{t \in [a, b]\colon |f(t)| > y\}$.

Припускаємо $m(f, y) = \mathrm{mes}\, l_y(f)$. Функція $t = m(f, y)$ визначена для $0 \leq y < +\infty$, не зростає і $m(f, 0) = b - a$, $m(f, +\infty) = \lim\limits_{y \to +\infty} m(f, y) = 0$.

Якщо $m(f, y)$ неперервна і строго спадна, то існує зворотна до неї строго спадна функція $R(f, t) \equiv R(f; a, b; t)$, яку називають спадною перестановкою функції $f(t)$. У загальному випадку функція $m(f, y)$ може мати проміжки сталості, а також розриви першого роду у кінцевій або лічильній кількості точок. Щоб однозначно визначити зворотну до неї функцію $R(f, t)$, графік $m(f, y)$ виправляють певним чином [22, с. 131].

Лема 1.

Нехай $f(t) \in W^r H_\omega[a, b]$ $(r \in N)$ і

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \ \left(a \leq x \leq b, b - a \leq \frac{1}{2}\right),$$

причому $F(b) = 0$. Якщо $\omega(t)$ є опуклий вгору модуль неперервності, то майже всюди на відрізку $[0, b - a]$ справедлива нерівність

$$\left|R^{(1)}(F, x)\right| \leq \frac{\Omega_r(\omega, x)}{4}. \tag{7}$$

Доведення леми 1.

Відомо з [22, с. 134], що з абсолютної неперервності функції $F(x)$ на відрізку $[a, b]$ випливає абсолютна неперервність перестановки $R(f, x)$ на відрізку $[0, b - a]$. Зафіксуємо точку $x_0 \in (0, b - a)$, в якій існує похідна $R^{(1)}(F, x_0)$, і припустимо $y_0 = R(F, x_0)$. Через визначення перестановки на інтервалі (a, b) знайдуться такі точки x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$, що $x_2 - x_1 \leq x_0$ і

$$|F(x_1)| = |F(x_2)| = R(F, x_0), sgn\, F(x_1) = \ sgn\, F(x_2), \tag{8}$$

$$|F(x)| > y_0 \ \forall x \in (x_1, x_2).$$

Враховуючи спадний характер перестановки $R(f,x)$, функції $F(x)$ і співвідношення (9) для досить малого за абсолютною величиною $h < 0$ підберемо числа $h_1 > 0$ і $h_2 < 0$ так, щоб

$$|h_1 - h_2| < |h|, a < x_1 < x_1 + h_1 < x_2 + h_2 < x_2 < b$$

та виконувались рівності

$$R(F, x_0 + h) - R(F, x_0) = |F(x_1 + h_1) - F(x_1)| = |F(x_2 + h_2) - F(x_2)|, \quad (9)$$

$$sgn[F(x_1 + h_1) - F(x_1)] = sgn[F(x_2 + h_2) - F(x_2)]. \quad (10)$$

Неважко показати [23], що для обраних вказаним чином чисел h, h_1, h_2 справедлива нерівність

$$\frac{1}{|h|} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{|h_1|} + \frac{1}{|h_2|}\right). \quad (11)$$

Тоді із співвідношень (9)-(10), з урахуванням нерівності (11) маємо

$$\left|\frac{R(F,x_0+h)-R(F,x_0)}{4}\right| \leq \frac{1}{4}\left|\frac{F(x_1+h_1)-F(x_1)}{h_1} - \frac{F(x_2+h_2)-F(x_2)}{h_2}\right| \quad (12)$$

Якщо $f(t) \in W^r H_\omega[a,b]$ $(b - a \leq 1/2)$, то спрямовуючи h до 0 для лівої похідної функції $R(f,x)$ в точці отримаємо

$$\left|R_-^{(1)}(F, x_0)\right| \leq \frac{1}{4}\left|F^{(1)}(x_1) - F^{(1)}(x_2)\right| = \frac{1}{4}|f(x_1) - f(x_2)|.$$

Візьмемо з класу $W^r H_\omega^*$ функцію $g(t)$, що збігається з функціією $f(t)$ всюди на відрізку $[a,b]$. Тоді, враховуючи властивість функції $\Omega_r(\omega,t)$, із співвідношення вище маємо

$$\left|R_-^{(1)}(F, x_0)\right| \leq \frac{1}{4}|g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{1}{4}\Omega_r(\omega, x_2 - x_1) \leq\leq \frac{1}{4}\Omega_r(\omega, x_0).$$

Оцінка правої похідної $R_+^{(1)}(F, x_0)$ отримується аналогічним вищевикладеному чином. Лема 1 доведена.

Позначимо через $f_{2\nu}(t)$ функцію із класу $W^{2\nu}H_\omega^*$ $(\nu \in N)$, похідна якої порядку 2ν є непарна 1-періодична функція, причому

$$f_{2\nu}^{(2\nu)} = \frac{1}{2}\begin{cases} \omega(2t), & \text{якщо } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \omega(1-2t), & \text{якщо } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (13)$$

де $\omega(t)$ є опуклий вгору на відрізку $[0, 1/2]$ модуль неперервності. Неважко перевірити (див., напр., [2]), що для визначеної вище функції $f_{2\nu}(t)$ має місце наступна рівність

$$f_{2\nu}(t) = (-1)^\nu \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1}\sin((2k+1)2\pi t)}{(2k+1)^{2\nu}}, \quad (14)$$

де коефіцієнти b_{2k+1} визначені рівняннями (2).

Визначимо на фиксованому відрізку $[a,b]$ $(b - a \leq 1)$ функцію

$$\psi_{2\nu}(\omega;a,b;t)=f_{2\nu}\left(t-\frac{a+b}{2}\right). \tag{15}$$

Використовуючи рівняння (13) і властивості опуклого вгору модуля неперервності, неважко показати належність функції $\psi_{2\nu}(\omega;a,b;t)$ класу $W^{2\nu}H_\omega[a,b]$ $(\nu\in N)$. Покладемо

$$F_{2\nu+1}(x)\equiv F_{2\nu+1}(\omega;\ a,b;\ x)=\int_a^x \psi_{2\nu}(\omega;\ a,b;\ t)dt,$$
$$a\le x\le b. \tag{16}$$

Ясно, що $F_{2\nu+1}(x)\in W^{2\nu+1}H_\omega[a,b]$ $(\nu\in N)$ и, на підставі формул (14)-(15), $F_{2\nu+1}(b)=0$. Оскільки $F_{2\nu+1}(a+x)=F_{2\nu+1}(b-x)$, $0\le x\le (b-a)/2$ то, зберігаючи позначення, використовувані під час доведення леми 1, маємо

$$\left|\frac{R(F_{2\nu+1},x_0+h)-R(F_{2\nu+1},x_0)}{4}\right|=\frac{1}{4}\left|\frac{F_{2\nu+1}(x_1+h_1)-F_{2\nu+1}(x_1)}{h_1}-\right.$$
$$\left.-\frac{F_{2\nu+1}(x_2+h_2)-F_{2\nu+1}(x_2)}{h_2}\right|. \tag{17}$$

Переходячи до границі при $h\to 0$ із (18), враховуючи рівняння $x_1=a+t, x_2=b-t,\ x_0=x_2-x_1$ $(0\le t\le (b-a)/2)$ і співвідношення (2), (14 –16), отримаємо

$$\left|R_-^{(1)}(F_{2\nu+1},x_0)\right|=\frac{1}{4}\left|F_{2\nu+1}^{(1)}(x_1)-F_{2\nu+1}^{(1)}(x_2)\right|=$$
$$=\frac{1}{4}|2f_{2\nu}(x_0/2)|=\frac{1}{4}\Omega_{2\nu}(\omega,x_0). \tag{18}$$

Права похідна $R_+^{(1)}(F_{2\nu+1},x_0)$ оцінюється за допомогою вищенаведених міркувань. Оскільки перестановка функції $F_{2\nu+1}(x)$ спадає на відрізку $[0,b-a]$, то із рівняння (18) випливає, що майже всюди на $[0,b-a]$ $(b-a\le 1)$, має місце рівність

$$R^{(1)}(F_{2\nu+1},x)=-\frac{1}{4}\Omega_{2\nu}(\omega,x)\ (\nu\in N). \tag{19}$$

Лема 2.

Нехай функція $\varphi(x)\in\Phi$ неперервна і монотонно зростає на $[0,\infty)$. Якщо $f(t)\in W^{2\nu+1}H_\omega[a,b]$ $(b-a\le 1/2, \nu\in N)$, то в умовах леми 1 має місце співвідношення

$$R(F,x)\le R(F_{2\nu+1},x)\ (0\le x\le b-a), \tag{20}$$
$$\int_a^b \varphi(F(x))dx\le \int_a^b \varphi(F_{2\nu+1}(\omega;a,b;x))dx. \tag{21}$$

Доведення леми 2.

Із співвідношень (8) і (19) випливає, що майже всюди на відрізку $[0,b-a]$ $(b-a\le 1/2)$, $R^{(1)}(F,x)\ge R^{(1)}(F_{2\nu+1},x)$.

Тоді для будь-якого $x\in[0,b-a]$

$$\int_x^{b-a} R^{(1)}(F,t)dt \ge \int_x^{b-a} R^{(1)}(F_{2\nu+1},t)dt. \qquad (22)$$

Оскільки $R(F,b-a) = R(F_{2\nu+1}, b-a) = 0$, то із (22) випливає справедливість нерівності (20).

Через монотонне зростання функції $\varphi(x)$ на $[0,\infty)$ та її парності на R для будь-якого $v > 0$ маємо

$$\begin{aligned} &mes\{x: 0 \le x \le b-a, R(\varphi(f),x) > y\} \\ &\qquad = mes\{x: a \le x \le b, \varphi\big(f(x)\big) > y\} = \\ &= mes\{x: a \le x \le b, |f(x)| > \varphi^{-1}(y)\} = \\ &= mes\{x: 0 \le x \le b-a, R(f,x) > \varphi^{-1}(y)\} = \\ &= mes\{x: 0 \le x \le b-a, \varphi(R(f,x)) > y\}. \qquad (23)\end{aligned}$$

Використовуючи визначення інтеграла Лебега і співвідношення (23), маємо

$$\int_a^b \varphi(f(t))dt = \int_0^{b-a} R(\varphi(f),t)dt = \int_0^{b-a} \varphi(R(f,t))dt. \qquad (24)$$

Із (20) та (24) отримаємо

$$\int_a^b \varphi(F(t))dt = \int_0^{b-a} R(\varphi(F),t)dt \le \int_0^{b-a} R(\varphi(F_{2\nu+1}),t)dt$$
$$= \int_a^b \varphi\big(F_{2\nu+1}(t)\big)dt.$$

Лема 2 доведена.

Обговорення результатів

Продовжуючи доведення теореми 1, розглянемо довільну функцію $f(t) \in W^{2\nu+1}H_\omega^*$ $(\nu \in N)$. Покладемо

$$g(f,t) = f(t) - \sigma_n(f,t). \qquad (25)$$

Тоді для будь-якого $0 \le t \le 1, t \ne i/n$ $(i = \overline{0,n})$, внаслідок викладеного в п. 1, справедливо

$$g^{(1)}(f,t) = f^{(1)}(t) - \psi_n\big(f^{(1)},t\big). \qquad (26)$$

Розглядаючи функцію $g^{(1)}(f,t)$ на фіксованому відрізку $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$, довизначимо її на кінцях відрізка по неперервності. Зрозуміло, що функція $g^{(1)}(f,t)$ є елементом класу $W^{2\nu}H_\omega[(i-1)/n, i/n]$. Враховуючи визначення функції $\sigma_n(f,t)$ із (25), маємо $g(f,i/n) = 0, i = \overline{0,n}$. Тоді функції $g^{(1)}(f,t)$ и $g(f,t)$ задовольняють на відрізку $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ умовам леми 2, що накладаються на функції $f(x)$ і $F(x)$ відповідно. З урахуванням (21) і (25) для $n = 2, 3, \ldots$ запишемо

$$\int_{(i-1)/n}^{i/n} \varphi\big(g(f,t)\big)dt \le \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \varphi\left(F_{2\nu+1}\left(w; \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}; t\right)\right)dt. \qquad (27)$$

Використовуючи співвідношення (2) та визначення функції $F_{2\nu+1}(x)$ (14)-(16) неважко переконатись, що,

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \varphi\left(F_{2\nu+1}\left(w;\frac{i-1}{n},\frac{i}{n};t\right)\right)dt = \int_0^{1/n} \varphi\left(\frac{1}{2}\int_0^x \Omega_{2\nu}(\omega, 2t - - 1/n)dt\right)\mathrm{dx}\,. \quad (28)$$

На підставі (25) запишемо

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{\varphi(L)} = \sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1)/n}^{i/n} \varphi(g(f,t))\,dt.$$

Тоді, застосовуючи на кожному відрізку $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$, $\left(i=\overline{1,n}\right)$ нерівність (27) і враховуючи (28) для $n=2,3,\ldots$, отримаємо оцінку зверху

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{\varphi(L)} \le n\int_0^{1/n} \varphi\left(\frac{1}{2}\int_0^x \Omega_{2\nu}\left(\omega, 2t-\frac{1}{n}\right)dt\right)\mathrm{dx}\,. \quad (29)$$

Розглянемо на відрізку $[0,1]$ для $\nu \in N$ функцію

$$\lambda_{2\nu}(\omega,t) = (-1)^i\,\psi_{2\nu}\left(\omega;\frac{i-1}{n},\frac{i}{n};t\right), i=\overline{1,n}\,. \quad (30)$$

Використовуючи властивості опуклого вгору модуля неперервності $\omega(t)$ і співвідношення (13)-(15), неважко показати, що $\lambda_{2\nu}^{(2\nu)}(\omega,x)$ належить до класу H_ω^* у випадку парних n, а значить, $\lambda_{2\nu}(\omega,t) \in W^{2\nu}H_\omega^*$.

Очевидно, що функція

$$L_{2\nu+1}(\omega,x) = \int_0^x \lambda_{2\nu}(\omega,t)dt \ \ (0 \le t \le 1) \quad (31)$$

для $n=2m$ $(m \in N)$ є елементом класу $W^{2\nu+1}H_\omega^*$.

Із (14)-(16) и (30)-(31) випливає, що

$$L_{2\nu+1}(\omega, i/n) = 0, i=\overline{0,n}. \quad (32)$$

Завдяки інтерполяційному характеру функції $\sigma_n(f,t)$ маємо

$$\sigma_n(L_{2\nu+1}(\omega),t) = 0, 0 \le t \le 1. \quad (33)$$

Використовуючи рівняння (14)-(16), (30)-(33) та (28), запишемо для $n=2m$ $(m \in N)$

$$\left\|L_{2\nu+1}(\omega)-\sigma_n\big(L_{2\nu+1}(\omega)\big)\right\|_{\varphi(L)} = n\int_0^{1/n} \varphi\left(\frac{1}{2}\int_0^x \Omega_{2\nu}\left(\omega, 2t - -\frac{1}{n}\right)dt\right)\mathrm{dx}\,. \quad (34)$$

Співставляючи отриману раніше оцінку зверху (29) з оцінкою (34), переконуємось в тому, що для парних n співвідношення (5) непокращуване на всьому класі $W^{2\nu+1}H_\omega^*$ $(\nu \in N)$.

Теорема 1 доведена.

Наслідок 1.

Нехай $\varphi(x) = |x|^p$ $(0 < p < \infty)$ и ω(t) – опуклий вгору модуль неперервності. Тоді для будь-якої функції $f \in W^{2\nu+1}H_\omega^*$ $(\nu \in N)$ і $n = 2, 3, \ldots$ справедливо непокращувана для парних n нерівність

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{L_p}^p \le 2^{-p} n \int_0^{1/n} \left| \int_0^x \Omega_{2\nu}\left(\omega, 2t - \frac{1}{n}\right) dt \right| \mathrm{d}x\,. \qquad (35)$$

Граничним переходом в (35) при $p \to \infty$ отримаємо відповідні точні оцінки похибки наближення у метриці простору C при $n = 2m$ $(m \in N)$ и $r = 2\nu + 1$ $(\nu \in N)$.

Наслідок 2.

Нехай ω(t) – опуклий вгору модуль неперервності. Тоді при $n = 2m$ $(m \in N)$ и $r = 2\nu + 1$ $(\nu \in N)$ справедлива рівність

$$\sup_{f \in W^r H_\omega^*} \|f - \sigma_n(f)\|_C = \frac{1}{4} \int_0^{1/n} \Omega_{2\nu}(\omega, t) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{r-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1} \sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{(2k+1)^r}\,.$$

У метриках просторів $\varphi(L)$, породжених неперервними і спадними функціями $\varphi(x)$ $(0 \le x < \infty)$, отримані оцінки наближення класів 1-періодичних функцій $W^{2\nu+1}H_\omega^*$ $(\nu \in N)$, де $\omega(t)$ – опуклий вгору модуль неперервності, кусково-сталими функціями $\sigma_n(f, t)$ інтерполюючими функції $f(t) \in W^{2\nu+1}H_\omega^*$ на множині точок $t_i = i/n$ $(i = \overline{0, n})$.

Отримані оцінки є непокращуваними для $n = 2m$ $(m \in N)$ на всьому класі $W^{2\nu+1}H_\omega^*$ $(\nu \in N)$. Дані результати є своєрідним поширенням раніше відомих результатів на класи $W^{2\nu+1}H_\omega^*$ і більш загальні простори $\varphi(L)$.

Висновки

1. Отримані оцінки наближення 1-періодичних функцій з класів $W^{2\nu+1}H_\omega^*$ $(\nu \in N)$, де $\omega(t)$ – опуклий вгору модуль неперервності, кусково-сталими функціями $\sigma_n(f, t)$, інтерполюючими функціями $f(t) \in W^{2\nu+1}H_\omega^*$ на множині точок $t_i = i/n$ $(i = \overline{0, n})$ в метриках просторів $\varphi(L)$.

2. Отримано оцінку похибок наближення класів 1-періодичних функцій із класів $W^{2\nu+1}H_\omega^*$ $(\nu \in N)$, де $\omega(t)$ – опуклий вгору модуль неперервності, кусково-сталими функціями $\sigma_n(f, t)$ в інтегральній метриці L_p $(0 < p < \infty)$. Оцінки виражені через функцію $\Omega_{2\nu}(\omega, t)$.

3. Доведено теорему про зв’язок неперервної і монотонно зростаючої на $[0, \infty)$ функції $\varphi(x) \in \Phi$ і будь-якої функції $f \in W^{2\nu+1}H_\omega^*$

$(\nu \in N)$ і $n = 2, 3, \dots, \infty$; а також двох лем та двох наслідків з теореми.

4. Результати проведеного дослідження є своєрідним поширенням раніше відомих результатів наближення функцій на класи 1-періодичних функцій $W^{2\nu+1}H_{\omega}^{*}$ та більш загальні простори $\varphi(L)$.

5. Доведено, що отримані оцінки є непокращуваними для $n = 2m$ $(m \in N)$ на всьому класі $W^{2\nu+1}H_{\omega}^{*}$ $(\nu \in N)$.

6. Отримані нові результати теорії апроксимації функцій можуть бути використані для подальших практичних застосувань, зокрема, в теорії вейвлетів. Прикладним аспектом використання отриманих наукових результатів є також можливість застосування оцінок похибок наближення теорії чисельних методів при побудові чисельних алгоритмів й обробці сигналів.

Посилання

1. Корнейчук, Н. П. (1962). Об экстремальных свойствах периодических функций. *Доклады АН УССР*, 8, 993-998.

2. Сторчай, В. Ф. (1973). Точные оценки для норм дифференцируемых периодических функций в метрике L_2. *Український математичний журнал*, 25, 6, 832-841.

3. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения,* Наука, Москва, 1987.

4. Черницкая, О. В. (1998). Об аппроксимации непрерывных функций кусочно-постоянными в интегральных метриках. *Вестник Днепропетровского университета. Математик*а, 3, 128-137.

5. Tchenitskaya, O. V. (1999). Approximation of continuous functions classes by step functions in integral metrics. *East journal on approximations*, 5, 4, 403-418.

6. Черницкая, О. В. (1999). Поперечники классов $H^{\omega}[a, b]$. *Вестник Днепропетровского университета. Математика*, 4, 101-105.

7. Малоземов, В. Н. (1966). Об отклонении ломаных. *Вестник ЛГУ*, 2, 7, 150-153.

8. Сторчай, В. Ф. (1969). Об отклонении ломаных в метрике L_p? *Математические заметки*, 5, 1, 31-37.

9. Логинов, А. С. (1969). Приближение непрерывных функций ломаными. *Математические заметки*, 6, 2, 149-160.

10. Малоземов, В. Н. (1967). К полигональной интерполяции. *Математ. заметки*, 1, 5, 537-540.

11. Корнейчук, Н. П. (1996). О линейных поперечниках классов. *Український математичний журнал*, 48, 9, 1255-1264.

12. Bel'skii, S. A. (2002). On Piecewise-Constant Approximation of Continuous Functions of n Variables in Integral Metrics. *Ukrainian*

Mathematical Journal, 54, 358-370. Отримано з: https://doi.org/10.1023/A:1020505231310.

13. Иванов, В. И. (1988). Приближение в L_p кусочно-постоянными функциями. *Mathematical Notes*, 44(1), 523-532.

14. Pichugov, S. A. (1996). Approximation of measurable periodic functions in measure by step functions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 48, 795-800. Отримано з: https://doi.org/10.1007/BF02384229.

15. Agoshkova, T. A. (2014). Approximation of Periodic Functions of Many Variables in Metric Spaces by Piecewise-Constant Functions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 65, 1447-1459. Отримано з: https://doi.org/10.1007/s11253-014-0871-5.

16. Кочуров, А. С. (2013). Прямые и обратные теоремы о приближении кусочно-полиномиальными функциями. *Фундаментальная и прикладная математика*, 18(5), 129-144.

17. Шабозова, А. А. (2017). Приближение кривых ломаными в L_p. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*, 4(4), 622-630.

18. Шабозова, А. А. (2017). Приближение пространственных кривых ломаными в L_p. *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 23(4), 311-318.

19. Конунова, У. Х. (2016). О приближении непрерывных функций линейными интерполяционными сплайнами (ломаными). *Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук*, 3, 24-31.

20. Корнейчук, Н. П. (1981). Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных. *Известия АН СССР. Серия математика*, 45, 2, 266-290.

21. Корнейчук, Н. П. (1984). Сплайны в теории приближения. Москва: Наука, 352 с.

22. Корнейчук, Н. П. (1976). Экстремальные задачи теории приближения. Москва: Наука, 320 с.

23. Корнейчук, Н. П. (1967). Точные оценки для норм дифференцируемых периодических функций в метрике L. *Математические заметки*, 2, 6, 569-576.