Числове моделювання керованого руху дрона-квадрокоптера

Людмила Гарт
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2617-7851
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

Володимир Ружевич
ORCID: https://orcid.org/0009-0006-2127-4387
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

Вступ

Безпілотні літальні апарати (БПЛА, або дрони) стають наразі нагальною темою досліджень. Дрони є ефективним інструментом для моніторингу навколишнього середовища і забезпечення досягнення локацій, недоступних людині; їх активно використовують у військових цілях, таких, як розвідка, пристосовують для роботи в агресивному середовищі, для польотів у відкритому космосі та ін. На даний момент найпопулярнішим видом БПЛА є дрон-квадрокоптер через досить просту конструкцію та великий спектр завдань, що можуть бути вирішені за його допомогою. Однак, керування рухом дрона-квадрокоптера є складною задачею, яка вимагає розробки ефективних методів та алгоритмів для досягнення бажаних результатів. Числове дослідження керованого руху дрона-квадрокоптера стає важливим інструментом для дослідження його поведінки та оптимізації траєкторій польоту. Це відбувається з використанням апарату та методів теорії керування, спрямованих на формулювання та розв'язання крайової задачі необхідних умов оптимальності принципу максимуму Л.С. Понтрягіна з урахуванням обмежень на керування та на степені свободи дрона (так званих фазових обмежень), що регулюють його поведінку у просторі. Тому розробка й удосконалення існуючих систем керування дронами, а також пошук ефективних математичних методів для їх дослідження є актуальною проблемою у сфері системних досліджень.

Мета і завдання

Метою роботи є аналіз керованого руху дрона-квадрокоптера, що передбачає виконання наступних завдань: дослідження фізичних основ поведінки дрона-квадрокоптера та уточнення математичної моделі його руху на основі якісного аналізу існуючих моделей; формулювання оптимізаційної задачі та з'ясування її властивостей; конструювання на базі апарату функціонального аналізу і теорії оптимізації обчислювальних схем та програмних засобів розв'язання задачі оптимізації траєкторії польоту дрона-квадрокоптера; аналіз та інтерпретація отриманих результатів дослідження.

МАТЕРІАЛИ ТА МЕТОДИ

Математичну модель руху дрона складемо у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь, відповідно до [1]:

$$\dot{X}(t) = f\big(X(t), u(t)\big), \quad t_0 \le t \le T, \tag{1}$$

де $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{12}(t))^T$ – шукана векторна функція на $[t_0, T]$, яка характеризує процес керованого руху дрона і відображає всі ступені свободи, а саме, положення центру мас та орієнтацію дрона у просторі в кожен момент часу t $(t_0 \le t \le T)$; $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))^T$ – шуканий вектор параметрів керування, що визначають хід процесу і являють собою зусилля кожного з чотирьох моторів дрона в проміжку часу $[t_0, T]$; $f(X(t), u(t)) = (f_1(X(t), u(t)),\ f_2(X(t), u(t)), \ldots, f_{12}(X(t), u(t)))^T$ – відома векторна функція, яка описує внутрішній устрій дрона і враховує вплив зовнішніх факторів. Межі t_0 та T проміжку змінення часу вважатимемо фіксованими. Рівняння руху (1) доповнимо обмеженнями на змінні стану системи та керування:

$$X(t_0) = X^{(0)}; \tag{2}$$

$$X(T) = X^{(1)}; \tag{3}$$

$$X(t) \in G(t), \quad t_0 \le t \le T; \tag{4}$$

$$U = \{u(t) \in L_2^{(4)}[t_0, T]\colon\ u_{min} \le u_i(t) \le u_{max}, i = \overline{1,4}\}, \tag{5}$$

де $X^{(0)}$ та $X^{(1)}$ – відомі вектори з $\mathbb{R}^{12}$; $u_{min} \ge 0$ та $u_{max} > 0$ – задані величини, що визначають ресурс керування; $G(t) \subset E_{12}$ – множина фазових обмежень $(t_0 \le t \le T)$.

Для формулювання задачі керування рухом дрона визначимо цільовий функціонал, математичний зміст якого розглядатимемо як критерій оптимальності керування. Відомо, що через конструкційні особливості каркас дрона-квадрокоптера має бути значно легшим за ротори на кінцях каркасу, через що вага каркасу є дуже обмеженою. Відомо також, що дистанційний дрон-квадрокоптер має електричне живлення електромоторів від акумулятора, який розміщено в каркасі дрона. З цього випливає, що якісний дрон має оптимально використовувати заряд акумулятора для здійснення польоту, переміщення, маневрів, аби подовжити час своєї роботи; в противному випадку, довелося б збільшувати об'єм акумулятора, що, звісно, не вважалося б якісним рішенням. Отже, цільовий функціонал, що характеризує загальну інтенсивність використання роторів із плином часу, доцільно розглядати у вигляді

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{4} u_i^2(t)\, dt \tag{6}$$

Для мінімізації функціонала (6) за умов (1)–(5) застосуємо метод штрафних функціоналів [2], який дозволяє звести задачу (1)–(6) до задачі оптимального керування *з вільним правим кінцем* за рахунок введення «штрафів» на умови (3) на правому кінці траєкторії та на фазові обмеження (4). Отже, розглядатимемо таку задачу оптимального керування: знайти нижню грань функціонала

$$\tilde{J}(u) = \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{4} u_i^2(t)\, dt + P(u) \tag{7}$$

за умов (1), (2), (5), де через $P(u) > 0,\ u \in U$ позначено штрафний функціонал. Функціонал (7) за умов (1), (2), (5) є обмеженим знизу ($\inf \tilde{J}(u) > 0, u \in U$) та опуклим на опуклій замкненій обмеженій множині (5) з гільбертового простору $L_2^{(4)}[t_0, T]$ векторних функцій $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $u_i(t) \in L_2[t_0, T]$ ($i = \overline{1,4}$) зі скалярним добутком

$$(u, v)_{L_2^{(4)}[t_0,T]} = \int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{4} u_i(t) \cdot v_i(t)\, dt, \quad \forall u, v \in L_2^{(4)}[t_0, T]$$

та нормою елемента

$$\|u\|_{L_2^{(4)}[t_0,T]} = \sqrt{(u,u)_{L_2^{(4)}[t_0,T]}} = \sqrt{\int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{4} u_i^2(t)\, dt}, \quad \forall u \in L_2^{(4)}[t_0, T].$$

Крім того, функціонал (7) за умов (1), (2), (5) є неперервно-диференційованим на множині U і його градієнт задовольняє на U умову Ліпшиця. Зазначені властивості, на підставі узагальненої теореми Вейерштрасса, дозволяють стверджувати, що функціонал (7) за умов (1), (2), (5) досягає своєї нижньої грані на U. До розв'язання оптимізаційної задачі (7), (1), (2), (5) будемо застосовувати метод умовного градієнта, збіжність якого випливає із загальної теореми про збіжність цього методу у гільбертовому просторі [2, 3].

Результати

Розроблений програмний продукт містить реалізацію методу штрафних функціоналів та методу умовного градієнта у поєднанні з допоміжними процедурами розв'язання відповідних задач Коші. Для реалізації консольної програми було використано мову програмування Java в середовищі програмування IntelliJ IDEA Community Edition 2020.3.3. Чисельні експерименти було проведено з початковими параметрами математичної моделі, визначеними в роботі [4] з урахуванням [1]: $g = 9{,}81\ \text{м/с}^2$; $m = 1{,}44$ кг; $l = 0{,}225$ м; $k_l = 1$; $b = 1$; $I_x = I_y = 0{,}0151\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$; $I_z = 0{,}0253\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$; $A_x = A_y = A_z = 0{,}25\ \text{кг/с}$. Модель досліджувалася на проміжку змінення часу $[t_0, T] = [0, 1]$ з обмеженнями на компоненти керування $u_{min} = 0$, $u_{max} = 1$. Під час застосування зазначених методів було побудовано сіткову апроксимацію сформульованої задачі оптимального керування із залученням узагальненої квадратурної формули Сімпсона та реалізовано ітераційні алгоритми мінімізації розширеного сіткового функціонала з адаптованим варіантом вибору крокового множника. Виконано якісний аналіз отриманих числових та графічних результатів; сформульовано відповідні висновки щодо практичної збіжності, точності та алгоритмічної складності реалізованих алгоритмів.

Висновки

Результати досліджень можуть бути використані у подальшій науковій роботі авторів під час вдосконалення математичної моделі керування рухом дрона-квадрокоптера та покращення стійкості такої моделі із залученням відповідних регуляризуючих алгоритмів [5].

Представлене дослідження було частково профінансоване Міністерством закордонних справ Чеської Республіки в межах проєкту № 23-PKVV-UM-4 «Підтримка підвищення якості викладання, наукових досліджень та міжнародної діяльності в Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара (ДНУ)», реалізованого Карловим університетом і ДНУ.

Посилання

1. Luukkonen, T. (2011). *Modelling and control of quadcopter: Independent research project in applied mathematics*. Espoo: Aalto University. 26 p.

2. Vasiliev, F. P. (1974). *Lectures on methods for solving extremal problems*. MSU Publishing House. 376 p.

3. Гарт, Л. Л. (2013). Проекционно-итерационная реализация метода условного градиента минимизации функционала в гильбертовом пространстве. *System research and information technologies*, 3, 104–117.

4. Нагайко, Д. Ю. (2018). *Система керування пошуково-рятувальним безпілотним літальним апаратом*: магістерська дисертація, 126 Системи керування. Київ: КПІ. 158 с.

5. Гарт, Л. Л. (2017). *Проекційно-ітераційні методи розв'язання операторних рівнянь та задач нескінченновимірної оптимізації*: Дис. … д-ра фіз.-мат. наук, 01.05.01, МОН України. Дніпро: ДНУ. 293 с.