

# Вибір параметрів моделі руху ракети-носія для виведення космічних апаратів на кругові орбіти

Руслан Кеба , Анатолій Кулабухов 

**Purpose.** This study aims to justify the selection of parameters for a launch vehicle's pitch angle program during the insertion of spacecraft into circular orbits. The goal is to improve the accuracy and efficiency of the insertion process, optimizing the delivery of payloads to their target orbits. **Design / Method / Approach.** The research develops a detailed mathematical model that defines the pitch angle of a launch vehicle, specifically focusing on the relationships between the vertical and horizontal velocity components. These velocity components are represented as parabolic functions, and the model's coefficients are chosen based on numerical simulations using real flight data from the Falcon 9 rocket. Additionally, an analytical approach is presented to evaluate how different parameters influence the final orbit insertion. **Findings.** Analytical dependencies for model parameter selection are established, closely matching numerical simulations and confirming the validity of the approach for ensuring precise spacecraft insertion into circular orbits. **Theoretical Implications.** The model provides a new approach to calculating pitch angle programs using parabolic functions, contributing to the theoretical understanding of launch vehicle dynamics during orbital insertion. **Practical Implications.** The method can improve the efficiency of pitch angle programs for launch vehicles during the active phase of flight, optimizing payload delivery and enabling higher orbital insertions. **Originality / Value.** This research presents a novel methodology for modeling pitch angle programs, improving accuracy and efficiency in spacecraft orbit insertion. **Research Limitations / Future Research.** The model assumes simplified velocity profiles and does not account for atmospheric drag or real-time adjustments, which could be included in future research. **Paper Type.** Methodological.

## Keywords:

launch vehicle dynamics, spacecraft circular orbit insertion, mathematical model, pitch angle program, orbital trajectory optimization

## Contributor Details:

Ruslan Keba, PhD Student, Oles Honchar Dnipro National University: Dnipro, UA, [phd@kebamail.com](mailto:phd@kebamail.com)

Anatoly Kulabukhov, PhD, Assoc.Prof., Oles Honchar Dnipro National University: Dnipro, UA, [kulabukhov@ukr.net](mailto:kulabukhov@ukr.net)



Більшість супутникових систем для підтримки стабільності угруповання супутників у просторі за існуючими технологіями використовують кругові орбіти. Вивід космічних апаратів на такі орбіти здійснюється ракетами-носіями, для яких важливим є вибір оптимального кута тангажу, що може сприяти або збільшенню корисного навантаження, що виводиться на орбіти, або вивід заданого навантаження на більш високі орбіти. Існує кілька методів формування такої програми (Кеба & Kulabukhov, 2023; Dwi et al, 2017; de Volo et al, 2017; Wang et al, 2022; Aksen et al, 2024). В (Кеба & Кулабухов, 2024) запропонований метод вибору програми кута тангажу, який визначається відношенням горизонтальної до вертикальної складової швидкості польоту. В якості моделі руху запропоновані параболічні моделі цих складових швидкостей руху ракет-носіїв, які близькі до реальних процесів, отриманих з ракети-носія Falcon 9 (Shahar603, 2020). Було також запропоновано методику обрання коефіцієнтів таких моделей за характеристиками ракети-носія. Але в цієї моделі не були встановлені залежності між параметрами обрання деяких коефіцієнтів моделі, які б забезпечували вивід космічного апарата на задану висоту з заданою швидкістю.

## Мета та завдання

Оптимізація програми кутового руху ракети-носія за кутом тангажу є критично важливим завданням для космічної галузі, оскільки безпосередньо впливає на ефективність виводу корисного навантаження на задані орбіти. У попередній роботі (Кеба & Кулабухов, 2024) була запропонована модель руху, яка базується на параболічних функціях, що описують вертикальну і горизонтальну складові швидкості. Проте залишається невирішеним питання встановлення аналітичних залежностей між параметрами цієї моделі та кінцевими характеристиками орбіти космічного апарата.

Мета роботи полягає у розробці та обґрунтуванні математичної моделі для визначення оптимальних параметрів кутового руху ракети-носія під час виводу космічного апарата на кругові орбіти, що дозволить підвищити ефективність використання енергетичних можливостей ракети-носія.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

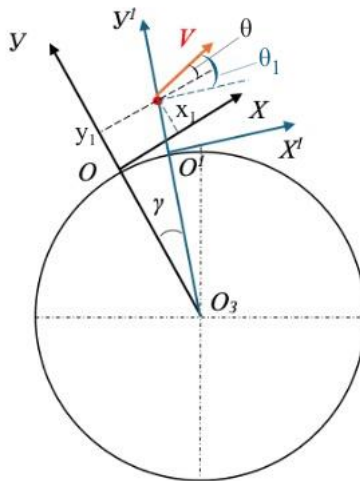
- встановити аналітичні залежності між параметрами параболічної моделі складових швидкості та кінцевими характеристиками орбіти;
- розробити методику визначення оптимальних параметрів моделі для заданих характеристик кругової орбіти;
- провести верифікацію отриманих результатів шляхом порівняння з даними чисельного моделювання.

Об'єктом дослідження є процес руху ракети-носія на активній ділянці траєкторії. Предметом дослідження є математична модель програми кутового руху ракети-носія за кутом тангажу, яка оснований на параболічних функціях складових швидкості руху.

## Обговорення та результати

Розглядається задача створення програми кута тангажу ракети-носія з інерційною системою наведення для виводу космічного апарата на кругову орбіту. Показано в (Кеба & Кулабухов, 2024), що доцільно створювати програму в орбітальній системі координат, в якій кут тангажу в процесі виводу на кругову орбіту в кінцевій точці повинен дорівнювати нулю, що значно спрощує модель кутового руху. Зв'язок між інерційною і орбітальною системою координат показаний на рис. 1.

На рис. 1 введені наступні позначення:  $YOX$  – інерційна система координат;  $Y'O'X'$  – орбітальна система координат;  $x_1, y_1$  – координати ракети в інерційній системі координат;  $\theta$  – кут тангажу в інерційній системі координат;  $\theta_1$  – кут тангажу в орбітальній системі координат;  $\gamma$  – центральний кут повороту орбітальної системи координат відносно інерційної;  $\dot{x}$  – проекція швидкості на ось  $X$  в інерційної системі координат;  $\dot{y}$  – проекція швидкості на ось  $Y$  в інерційної системі координат.



**Рисунок 1 – Зв'язок інерційної і орбітальної систем координат**  
(Джерело: Створено авторами)

Встановлена залежність між кутами тангажу в інерційній і орбітальній системах координат. Кут тангажу в інерційній системі координат буде визначатися виразом

$$\theta = \arctg \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad (1)$$

В орбітальній системі координат значення координати ракети по осі  $Y'$  буде

$$y_1^1 = R_3 + h \quad (2)$$

де  $R_3$  – радіус Землі;  $h$  – висота орбіти.

Центральний кут в інерційній системі координат можна визначити наступним чином

$$\gamma = \arctg \frac{x_1}{R_3 + y_1}. \quad (3)$$

Зв'язок між кутами тангажу в інерційній і орбітальній систем координат буде

$$\theta_1 = \theta + \gamma. \quad (4)$$

При виводі космічного апарата на кругову орбіту кінцеве значення кута тангажу в орбітальній системі координат повинно дорівнювати нулю. Тоді в інерційній системі координат в програмі тангажу на кінцевій ділянці польоту повинно виконуватися умова

$$\theta = -\gamma. \quad (5)$$

На підставі аналізу зміни швидкості та програм тангажу запропоновано вибір програму тангажу за законом

$$\theta = \arctn \frac{v_x}{v_y} \quad (6)$$

Для вибору моделі зміни цих складових швидкостей були взяті характеристики зміни цих швидкостей на ракеті-носії Falcon 9 FT, які наведені на рис. 2 (Shahar603, 2020).

Кожну із цих складових швидкості можна описати певною математичною залежністю. Запропоновано описати ці залежності параболічними функціями у вигляді:

$$V_x(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < t_1 \\ a_x t^2 + b_x t + c_x, & \text{якщо } t \geq t_1 \end{cases}; \quad (7)$$

$$V_y(t) = a_y t^2 + b_y t + c_y, \quad (8)$$

де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – деякі постійні коефіцієнти.

Враховуючи вид зміни складових швидкостей, які представлені на рис. 2, моделі представлені у виді

$$V_x(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < t_1 \\ k_1(t - t_1)^2, & \text{якщо } t \geq t_1 \end{cases}; \quad (9)$$

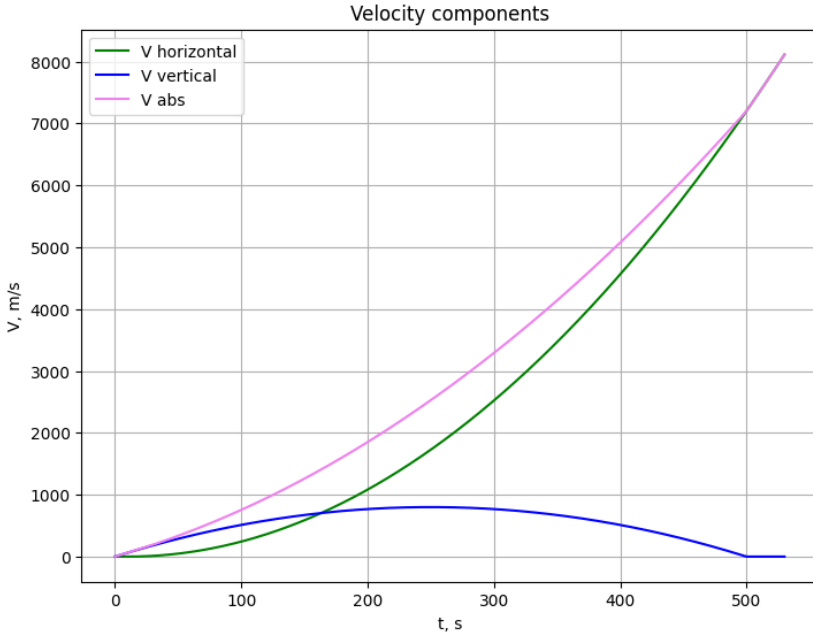
$$V_y(t) = -k_2(t - t_{cp})^2 + V_{ymax}, \quad (10)$$

де  $t_1$  – час вертикального зльоту ракети-носія;  $t_{cp}$  – середній час польоту ракети-носія на активній ділянці;  $k_1$  і  $k_2$  – постійні коефіцієнти, які обчислюються з умов отримання кінцевої швидкості на заданій висоті і максимальній швидкості  $V_{ymax}$  по горизонтальній складовій швидкості

$$k_1 = \frac{V_{kp}}{(t_k - t_1)^2},$$

$$k_2 = \frac{V_{кр} - V_{ymax}}{t_{ср}^2},$$

де  $V_{кр}$  – кругова швидкість, яку потрібно досягти ракеті-носію на заданій кі-  
нцевій висоті;  $t_{к}$  – час польоту ракети-носія на активній ділянці.



**Рисунок 2 – Характер зміни горизонтальної і вертикальної складових швидкості ракети-носія (Джерело: Створено авторами)**

Вихідними даними до створення програми руху по тангажу за методикою, що пропонується, є висота орбіти  $h$ , час польоту  $t$ , час вертикального зльоту ракети-носія  $t_1$  і кругова швидкість  $V_{кр}$ , яка залежить від висоти і може бути визначена виразом

$$V_h = \sqrt{\frac{GM}{R_3+h}}, \quad (11)$$

де  $G$  – гравітаційна стала  $6.67430 \times 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$ ;  $M$  – маса Землі  $5.972 \times 10^{24} \text{ кг}$ ;  $R_3$  – радіус Землі  $6.371 \times 10^6 \text{ м}$ .

Величина  $V_{ymax}$  повинна залежати від  $V_{кр}$  і забезпечувати вивід космічного апарата на задану висоту. Щоб забезпечити цю умову і визначитись з її величиною було проведення моделювання руху ракети-носія за визначеною методикою з різною  $V_{ymax}$  для висот 300, 400, 500, 600 та 700 км. Результат моделювання, який забезпечує вивід на кругову орбіту на висоту 500 км наведений на рис. 3, 4.

Також запропоновано підхід для визначення цієї залежності аналітично. Для цього випадку рівняння вертикальної швидкості буде мати вигляд:

$$V_y(t) = \frac{-4V_{y\max}}{t_e^2} t^2 + \frac{4V_{y\max}}{t_e} t \quad (12)$$

Звідки висота орбіти  $h$  визначається як інтеграл цього рівняння:

$$h(t) = \int_0^{t_e} V_y(t) dt = \int_0^{t_e} \left( \frac{-4V_{y\max}}{t_e^2} t^2 + \frac{4V_{y\max}}{t_e} t \right) dt = \frac{-4V_{y\max}}{3t_e^2} t^3 + \frac{2V_{y\max}}{t_e} t^2 + C \quad (13)$$

де  $t_e$  – час закінчення активної ділянки руху.

Враховуючі початкові і кінцеві умови отримуємо:

$$h(t_e) = -\frac{4V_{y\max}}{3t_e^2} t_e^3 + \frac{2V_{y\max}}{t_e} t_e^2. \quad (14)$$

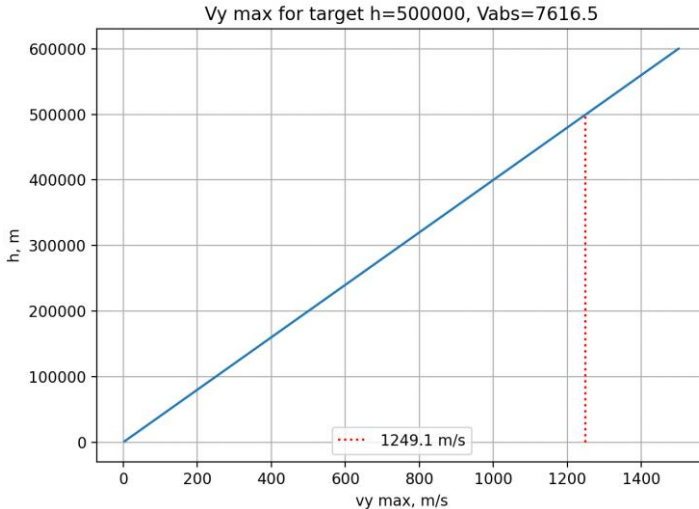
Спростуючи вираз, маємо:

$$h(t_e) = \frac{2}{3} V_{y\max} t_e. \quad (15)$$

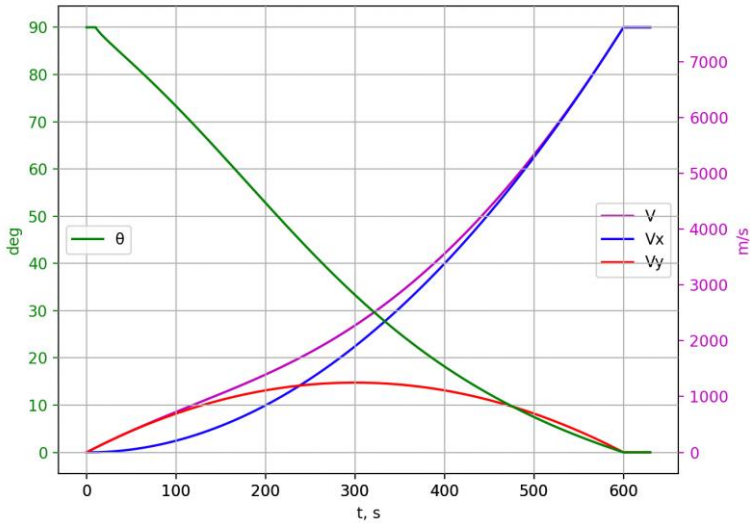
Звідки

$$V_{y\max} = \frac{3h(t_e)}{2t_e} \quad (16)$$

Тобто  $V_{y\max}$  прямо пропорційне залежить від висоти орбіти та зворотно пропорційне від  $t_e$  — часу активної ділянку руху. Результати чисельного моделювання і аналітичні залежності визначення  $V_{y\max}$  наведені в табл. 1.



**Рисунок 3 – Значення максимальної вертикальної швидкості  $V_{y\max}$  для орбіти 500 км (Джерело: Створено авторами)**



**Рисунок 4 – Програма тангажу  $\theta$  і складові швидкості для орбіти висотою 500 км (Джерело: Створено авторами)**

**Таблиця 1 – Результати чисельного моделювання і отримані аналітичні залежності визначення  $V_{y\max}$  від висоти (Джерело: розроблено авторами)**

Висота орбіти, км	Значення $V_{y\max}$ отримане чисельним моделюванням, м/с	Значення $V_{y\max}$ отримане аналітично, м/с
300	749,8	750
400	1001,3	1000
500	1249,1	1250
600	1501,0	1500
700	1749,4	1750

## Висновки

Розроблена математична модель для визначення параметрів кутового руху ракети-носія при виводі космічного апарата на кругові орбіти, яка використовує параболічні функції вертикальної та горизонтальної складових швидкості.

Отримана аналітична залежність обрання параметрів запропонованої моделі від кінцевих даних руху ракети-носія при виводі космічного апарата на кругову орбіту. Означені аналітичні залежності параметрів моделі збігаються з результатами чисельного моделювання, що підтверджує достовірність отриманих результатів.

Створена математична модель може бути використана для визначення ефективної програми кутового руху ракети-носія за кутом тангажу під час виводу космічного апарата на кругові орбіти.

## Посилання

- Aksen, U., Aslan, A. R., & Goker, U. D. (2024). Comprehensive Six-Degrees-of-Freedom Trajectory Design and Optimization of a Launch Vehicle with a Hybrid Last Stage Using the PSO Algorithm. *Applied Sciences*, 14(9), 3891. <https://doi.org/10.3390/app14093891>
- de Volo, G. D. C. B., Naeije, M., Roux, C., & Volpi, M. (2017). Vega launchers' trajectory optimization using a pseudospectral transcription. In *Proceedings of the European Conference for Aeronautics and Space Sciences* (pp. 1-15). <https://doi.org/10.13009/EUCASS2019-710>
- Dwi, L., Herlambang, S., & Muhammad, R. D. (2017). Optimization pitch angle controller of rocket system using improved differential evolution algorithm. *International Journal of Advances in Intelligent Informatics*, 3(1), 27-34. <https://doi.org/10.26555/ijain.v3i1.83>
- Keba, R., & Kulabukhov, A. (2023). Аналіз методів і моделей руху ракето-носіїв на активній дільниці. *Journal of Rocket-Space Technology*, 32(4), 76-82. <https://doi.org/10.15421/452331>
- Shahar603 (2020). Telemetry-Data. GitHub. <https://github.com/shahar603/Telemetry-Data>
- Wang, X., Dai, P., Cheng, X., Liu, Y., Cui, J., Zhang, L., & Feng, D. (2022). An online generation method of ascent trajectory based on feedforward neural networks. *Aerospace Science and Technology*, 128, 107739. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.107739>
- Кеба, Р., & Кулабухов, А. (2024). Методика визначення програми кута тангажу для виводу космічних апаратів на кругові орбіти. *Challenges and Issues of Modern Science*, 2, 249-254. <https://cims.fti.dp.ua/j/article/view/136>