*Challenges and Issues of Modern Science, 3 (2024). ISSN: 3083-5704*
*URL: https://cims.fti.dp.ua/j/article/view/256*
*PURL: https://purl.org/cims/2403.015*

# Інтегрування нестаціонарних систем оптимального керування із післядією та нестабільним спектром

**Петро Самусенко, Тетяна Новік, Микола Рашевський**

**Purpose**. We considered a non-stationary optimal control system with delay. Non-stationary optimal control systems are described by systems of differential or differential-algebraic equations. Variable coefficients do not allow, in general, to construct a solution to such systems in quadratures. Numerical or asymptotic methods are used to solve such systems. **Design / Method / Approach.** In this paper, asymptotic methods are used, in particular, the Feshchenko-Shkil' method for integrating singularly perturbed systems and the Wasow's method for systems with an unstable spectrum. **Findings**. In this paper, we construct a transformation that reduces the optimal delay control system to a system that does not contain terms without rejecting the argument. This transformation makes it possible to integrate the system by the method of steps without solving systems of differential equations at each step. **Theoretical Implications**. The system of equations obtained as a result of the transformation of the original system is somewhat easier to study in terms of building a solution. However, the problem of optimizing the control of both systems requires both a separate mathematical study and clarification of the practical reality of spectrum instability in such systems. **Practical Implications**. If the instability of the spectrum is caused by the degeneracy of the main matrix, this leads to the unboundedness of the system solution as the small parameter approaches zero. The aforementioned growth of the solution can create emergency situations in real systems. **Originality / Value**. The delayed control systems in the described formulation are studied for the first time. **Research Limitations / Future Research**. Future research concerns solving the problem of optimal control of systems with an unstable spectrum and studying the question of the reality and physical meaning of turning points in specific systems. **Paper Type**. Conceptual Paper.

**Keywords:**

system of automatic control, systems of differential equations with degenerations, asymptotic solution, turning point, systems with delays

**Contributor Details:**

Petro Samusenko, Dr.Sc., Prof. National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute": Kyiv, UA, psamusenko@ukr.net

Tetiana Novik, Sr.Lect., Separate structural division "Kryvyi Rih Professional College of the National Aviation University": Kryvyi Rih, UA, novik_tanya@g-suit.kk.nau.edu.ua

Mykola Rashevskyi, Cand.Sc., Assoc.Prof., Separate structural division "Kryvyi Rih Professional College of the National Aviation University": Kryvyi Rih, UA, rashevskyi@g-suit.kk.nau.edu.ua

Задачі оптимізації процесу керування, що описується системою диференціальних або диференціально-алгебричних рівнянь вигляду

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t,\varepsilon)\vec{x} + C(t,\varepsilon)\vec{u}$$

неоднoразово досліджувались у працях В. П. Яковця, О. В. Тарасенко у зв'язку із широкими практичними застосуваннями, зокрема у радіотехніці. Записана система алгебрично-диференціальних рівнянь описує нестаціонарний процес на досить великому проміжку часу.

Реальній системі здебільшого потрібен деякий час для реагування на вхідний сигнал чи зовнішню дію, тому системи керування з післядією вивчаються при різних постановках задач оптимізації (Boykov & Krivulin, 2021; Michiels, 2021; Stanzhytskyi, 2023). Прикладом згаданої системи є система лінійних рівнянь з післядією вигляду

$$\varepsilon\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t,\varepsilon)\vec{x} + B(t,\varepsilon)\vec{x}(t-\Delta,\varepsilon) + C(t,\varepsilon)\vec{u}, \tag{1}$$

Тут $A(t, \varepsilon)$ та $B(t, \varepsilon)$ – квадратні матриці $n$-го порядку, $C(t, \varepsilon)$ – $(n \times m)$-матриця, $\vec{x}(t,\varepsilon)$– $n$-вимірний вектор стану, $\vec{u}(t,\varepsilon)$–$m$-вимірний вектор керування, $\varepsilon > 0$ – дійсний малий параметр, $t \in [0; T]$. $T < +\infty$.

Щодо останнього доданка системи (1), то вектор керування може також містити відхилення аргументу, що називають запізненням керування. Записані вище системи можна введенням повільного часу $t = \varepsilon{\cdot}\tau$ звести до систем з повільно змінними коефіцієнтами, до яких можна застосувати асимптотичні методи Фещенка-Шкіля, перевагою яких перед чисельними методами є аналітичний запис розв'язку.

## Мета і завдання

Розглянемо задачу оптимального керування системою (1). Для згаданої системи ставиться основна початкова задача: побудувати розв'язок, який на проміжку $t \in [-\Delta; 0)$ задовольняє умову

$$\vec{x}(t,\varepsilon) = \vec{\varphi}(t,\varepsilon). \tag{2}$$

Постановка задачі побудови оптимального розв'язку системи (1) та відшукання такого вектору керування, щоб задовольнити критерій якості вигляду (Stanzhytskyi et al., 2023)

$$J_\varepsilon(u) = \Phi(\vec{x}(T,\varepsilon),\vec{u}) \rightarrow inf$$

у цій роботі не розглядатиметься, це складатиме предмет окремого дослідження. Оскільки коефіцієнти системи є змінними величинами, то такі системи у загальному випадку не зводяться до квадратур, отже потребують застосування чисельних або асимптотичних методів. Застосуємо асимптотичний метод Фещенка-Шкіля для побудови фундаментальної матриці лінійної системи, що утворена із системи (1) відкиданням доданків із запізненням та вектору керування, а також метод В. Вазова, розроблений для інтегрування сингулярно збурених систем із нестабільним спектром головної матриці. Наявність фундаментальної матриці дає можливість звести систему (1) до такої, що не містить доданків без відхилення аргументу, отже для інтегрування потребуватиме тільки використання методу кроків без розв'язування систем диференціальних рівнянь на кожному кроці. Вперше таке перетворення систем із запізненням у випадку стабільного спектру головної матриці було виконано у працях М. І. Шкіля та Ю. П. Підченка. У цій роботі виконаємо подібне перетворення для системи оптимального керування із запізненням у випадку нестабільного спектру. Вперше дослідження систем із нестабільним спектром, і зокрема, із точками повороту, розпочато у працях В. М. Лейфури.

Асимптотичне зображення розв'язку будь-якої задачі оптимізації істотно залежить від спектру в'язки матриць (у випадку диференціально-алгебричних рівнянь) або від спектру головної матриці системи (для суто диференціальних рівнянь). Оскільки надалі йтиметься про систему (1), то запишемо її характеристичне рівняння:

$$A(t,0) - \lambda(t)E. \tag{3}$$

## Матеріали і методи

Використаємо згадані вище асимптотичні методи для побудови фундаментальної матриці системи

$$\varepsilon \frac{d\vec{x}}{dt} = A(t,\varepsilon)\vec{x}, \tag{4}$$

утвореної із системи (1). Вимагатимемо виконання таких умов:

$1^0$. Матриця $A(t, \varepsilon)$ зображується збіжним степеневим рядом

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t),$$

де доданки правої частини є неперервними функціями на проміжку побудови розв'язку. Аналогічними рядами також зображуються інші матриці системи (1) та початковий вектор (2).

$2^0$. Корені характеристичного рівняння (3), тобто власні значення матриці $A(t, 0)$, є простими для $t \in (0; T]$, і збігаються в точці $t = 0$, причому є суто уявними, а саме:

$$\lambda_k(t) = it^q w_k(t);\ w_k(0) \neq 0,\ q\ \geq 1; k = 1,2, \dots n.$$

$3^0$. Існує неособлива матриця $T(t)$ така, що справджується рівність

$$T^{-1}A_0(t)T = \Lambda(t) = diag\{\lambda_1(t),\quad \lambda_2(t), \dots,\quad \lambda_n(t)\}.$$

Систему рівнянь із такою матрицею називають майже діагональною.

Побудуємо фундаментальну матрицю системи (1). Обмежимося лише алгоритмічною частиною побудови без доведень математичних тверджень. Детальні записи рекурентних формул і асимптотичні оцінки наведено в (Самусенко et al., 2024).

Підстановкою

$$\vec{x}(t,\varepsilon) = U(t,\varepsilon)\vec{z}(t,\varepsilon),$$

де $U(t,\varepsilon)$ – квадратна матриця розміру $n$, яка зображується рядом вигляду (3), дістанемо систему рівнянь для невідомого вектора $\vec{z}(t,\varepsilon)$:

$$\varepsilon U(t,\varepsilon)\frac{d\vec{z}}{dt} = \left(A(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon) - \varepsilon\frac{dU(t,\varepsilon)}{dt}\right)\vec{z}(t,\varepsilon),$$

Невідомі матриці зображення $U(t,\varepsilon)$ будуватимемо так, щоб справджувалися такі тотожності:

$$A(t,\varepsilon)U(t,\varepsilon) - \varepsilon\frac{dU(t,\varepsilon)}{dt} = U(t,\varepsilon)\big(\Lambda(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_{m+1}(t,\varepsilon)\big).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях малого параметра в останній тотожності, дістанемо рівняння для визначення перших $m$ доданків ряду для невідомої матриці $U(t,\varepsilon)$, та вираз для похибки $C_{m+1}(t,\varepsilon)$, що утворюється не скомпенсованими доданками.

Система матричних рівнянь для визначення невідомих доданків у зображенні $U(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t)$ має вигляд

$$\Lambda_0(t)U_0(t) - U_0(t)\Lambda_0(t) = 0,$$

$$\Lambda_0(t)U_k(t) - U_k(t)\Lambda_0(t) = \frac{dU_{k-1}(t)}{dt} + F_k(t,U_{k-1},\varepsilon), k = 1,2,\dots m.$$

Тут $\Lambda_0(t) = \Lambda(t) = diag\{\lambda_1(t), \quad \lambda_2(t),\dots, \quad \lambda_n(t)\}$.

Застосування описаної процедури приводить до системи рівнянь

$$\varepsilon\frac{d\vec{z}}{dt} = \big(\Lambda(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_{m+1}(t,\varepsilon)\big)\vec{z},$$

що з точністю до $O(\varepsilon^{m+1})$ інтегрується у квадратурах:

$$\vec{z}(t,\varepsilon) = U(t,\varepsilon)\exp\{\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda(s,\varepsilon)ds\}\,\vec{c},$$

отже, матимемо фундаментальну матрицю системи (1):

$$X(t,\varepsilon) = U(t,\varepsilon)\exp\{\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda(s,\varepsilon)ds\}\,U^{-1}(0,\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{mq}{q+1}}C_{m+1}(t,\varepsilon),$$

матриця $C_{m+1}(t,\varepsilon)$ є рівномірно обмеженою навколо точки (0; 0).

Далі скориставшись формулою

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(E + BA^{-1})^{-1}BA^{-1},$$

знайдемо

$$X^{-1}(t,\varepsilon) = \exp\{-\varepsilon^{-1}\int_0^t \Lambda(s,\varepsilon)ds\}\,U^{-1}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{mq}{q+1}}D(t,\varepsilon),$$

Після підстановки

$$\vec{x}(t,\varepsilon) = X(t,\varepsilon)\vec{y}(t,\varepsilon)$$

з урахуванням виразу для $X^{-1}(t,\varepsilon)$, дістанемо систему, що з точністю до $O\left(\varepsilon^{\frac{mq}{q+1}}\right)$ не міститиме доданків без відхилення аргументу (запізнення):

$$\varepsilon\frac{d\vec{y}}{dt} = M(t,\varepsilon)\vec{y}(t-\Delta,\varepsilon) + N(t,\varepsilon)\vec{u} + \varepsilon^{\frac{mq}{q+1}}R(t,\varepsilon). \tag{5}$$

## Результати

Таким чином, систему оптимального керування (1) із запізненням зведено до системи рівнянь (5), що не містить елементів без відхилення аргументу, що дає можливість інтегрувати останню методом кроків, не розв'язуючи на кожному кроці систему звичайних диференціальних рівнянь. Побудова перетворення, звичайно, передбачає розв'язування системи диференціальних рівнянь, але це відбувається один раз, а не на кожному кроці.

## Висновки

Система (5), отримана в результаті перетворення системи (1) є дещо простішою для дослідження з точки зору побудови розв'язку. Проте задача оптимізації керування системами (1) і (5) потребує як окремого математичного дослідження, так і з'ясування питань про практичну реальність нестабільності спектру у таких системах. Якщо нестабільність пов'язана із виродженням головної матриці, то це призводить до необмеженості (зростанні при $\varepsilon \to 0$) розв'язку системи, що може створювати аварійні ситуації в реальних системах. Так, у теорії лінійних систем зі змінними коефіцієнтами досліджується так звана «стійкість розв'язку на скінченному проміжку». Нестійкістю називають ситуацію, коли розв'язок перевищує наперед задану величину. Наявність керування дає можливість уникати таких зростань. Ще один напрям досліджень стосується побудови розв'язку алгебрично-диференціальних систем із нестабільним спектром у разі тотожного виродження матриці при похідній. Тут саме означення нестабільності потребує аналізу. Дослідження в цьому напрямку проводитимуться надалі.

## Посилання


Boykov, I. V., & Krivulin, N. P. (2021). Methods for Control of Dynamical Systems with Delayed Feedback. *Journal of Mathematical Sciences, 255*(5), 561–573. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05393-4

Michiels, W. (2021). Control of linear systems with delays. In *Encyclopedia of Systems and Control* (pp. 338-345). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44184-5_16

Stanzhytskyi, O. M., Kichmarenko, O. D., Mogylova, V. V., & Koval'chuk, T. V. (2023). Optimal Control Over Systems of Functional-Differential Equations With Infinite Delay. *Ukrainian Mathematical Journal, 75*(1), 157–173. https://doi.org/10.1007/s11253-023-02191-w

Самусенко, П., Даниліна, Г., & Рашевський, М. (2024). Про асимптотичне інтегрування лінійних систем диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу. *Збірник Наукових Праць Фізико-Математичного Факультету ДДПУ, 14*, 015–023. https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079142024311278