Challenges and Issues of Modern Science
2025, Vol. 4, No. 1, 89–93
ISSN: 3083-5704
URL: https://cims.fti.dp.ua/j/article/view/289
PURL: https://purl.org/cims/4.289

DOI: https://doi.org/10.15421/cims.4.289 UDC 629.78

Задача оптимізації кута тангажу ракети-носія при виводі космічних апаратів на кругові орбіти

Руслан Кеба, Анатолій Кулабухов

Purpose. The aim of the study is to formulate and analytically pose the task of constructing the pitch program of a launch vehicle, ensuring the insertion of a spacecraft into a circular orbit, considering constraints on the motion parameters and requirements for the final state. **Design / Method / Approach**. An analytical model for the pitch program is proposed, consisting of five phases: vertical ascent, angular acceleration, constant angular velocity motion, deceleration, and a final fixed-angle phase. Dimensionless coefficients are introduced to characterize the relative durations of active angular maneuver phases. **Findings**. Analytical expressions were derived for the pitch angle, angular velocity, and acceleration for each control phase, ensuring continuity and physical realizability. Expressions for the resulting orbital altitude and control effort provide a basis for multi-criteria optimization. **Theoretical Implications**. The developed formalization enables analytical optimization of the pitch program without a full vehicle motion model, aiding understanding of the link between control structure and orbital injection conditions. **Practical Implications**. The proposed model can be used in preliminary design stages for initial synthesis of the launch vehicle pitch program, enabling rapid assessment of trajectory controllability and compliance with specified orbital parameters, avoiding full-scale simulation. **Originality / Value**. Unlike approaches based on full numerical integration, this study presents a simplified, analytically manageable pitch program model, allowing efficient optimization considering physical constraints and final conditions. **Research Limitations / Future Research**. Limitations involve the simplified analytical model with fixed control phases. Future work involves numerical optimization (using gradient-based, heuristic, or global methods) to precisely determine optimal pitch program parameters. **Article Type**. Methodological paper.

Keywords:

launch vehicle dynamics, spacecraft circular orbit insertion, mathematical model, pitch angle program, orbital trajectory optimization

---

Мета. Метою дослідження є формулювання та аналітична постановка задачі побудови програми тангажу ракети-носія, яка забезпечує виведення космічного апарата на кругову орбіту, з урахуванням обмежень на параметри руху і вимог до кінцевого стану. **Дизайн / Метод / Підхід**. Запропоновано аналітичну модель програми тангажу, яка складається з п’яти ділянок: вертикального руху, кутового прискорення, руху з постійною кутовою швидкістю, гальмування та завершальної фази з фіксованим кутом. Введено безрозмірні коефіцієнти, що характеризують відносні тривалості фаз активного кутового маневру. **Результати**. Отримано аналітичні залежності для функцій кута тангажу, кутової швидкості та прискорення на кожній фазі керованого руху, що забезпечують неперервність і фізичну реалізацію. Визначено вирази для орбітальної висоти та витрат керуючої дії, які слугують основою для багатокритеріальної оптимізації. **Теоретичне значення**. Розроблена формалізація задачі дозволяє здійснювати аналітичну оптимізацію програми тангажу без необхідності побудови повної моделі руху ракети, що сприяє глибшому розумінню взаємозв’язку між структурою керування та орбітальними умовами виведення. **Практичне значення**. Запропонована модель може бути використана на проектних етапах для попереднього синтезу програми тангажу ракети-носія, забезпечуючи швидке оцінювання керованості траєкторії та її відповідності заданим орбітальним параметрам без застосування повномасштабного моделювання. **Оригінальність / Цінність**. На відміну від підходів, що ґрунтуються на чисельному інтегруванні повної системи рівнянь руху, запропоновано спрощену, але аналітично керовану модель програми тангажу, яка дозволяє ефективно виконувати оптимізацію з урахуванням фізичних обмежень і кінцевих умов. **Обмеження дослідження / Майбутні дослідження**. Дослідження обмежується використанням спрощеної аналітичної моделі з фіксованими фазами керування. Подальші дослідження передбачають реалізацію чисельного розв’язання задачі оптимізації з використанням градієнтних, евристичних або глобальних методів для точного визначення оптимальних параметрів програми тангажу. **Тип статті**. Методологічна стаття.

Ключові слова:

динаміка ракети-носія, виведення космічного апарата на кругову орбіту, математична модель, програма кута тангажу, оптимізація орбітальної траєкторії

Optimization Problem of the Launch Vehicle Pitch Angle during Spacecraft Insertion into Circular Orbits

Contributor Details:

Ruslan Keba, Ph.D. Student, Oles Honchar Dnipro National University: Dnipro, UA, phd@kebamail.com
Anatoly Kulabukhov, Ph.D., Assoc. Prof., Oles Honchar Dnipro National University: Dnipro, UA, kulabukhov@ukr.net

Received: 2025-05-04 Revised: 2025-05-15 Accepted: 2025-05-16

Формування програми тангажу є ключовим етапом при побудові траєкторії ракети-носія при виведенні на кругові орбіти. Програма тангажу забезпечує зміну напрямку руху ракети-носія — від початково вертикального на старті до горизонтального в орбітальній системі координат, а також сприяє досягненню заданої висоти орбіти із відповідною орбітальною швидкістю.

Питання побудови та оптимізації траєкторії виведення ракети-носія є предметом численних досліджень у галузі аерокосмічної інженерії та динаміки польоту. Різноманітні підходи, від аналітичних до складних чисельних методів, застосовуються для вирішення цієї багатогранної задачі. Загальний огляд сучасних досягнень у сфері оптимізації траєкторій космічних апаратів представлений (Malyuta et al., 2021), а аналіз методів і моделей руху ракет-носіїв на активній ділянці траєкторії наведено (Keba & Kulabukhov, 2023).

Застосування методів опуклої оптимізації для генерації траєкторій розглянуто в (Malyuta et al, 2022). Автори зазначають, що задачі генерації траєкторій для систем, включаючи ракети, часто є неопуклими. Проте, завдяки технікам реформулювання та алгоритмам послідовного опуклого програмування (SCvx) або безвтратної опуклості (LCvx), стає можливим ефективно та надійно розв'язувати ці задачі за допомогою опуклих оптимізаторів. Ці методи ефективні, надійні та придатні для застосування в режимі реального часу та для критично важливих місій, таких як посадка ракет.

В аерокосмічній інженерії досліджується використання штучного інтелекту (AI), зокрема великих мовних моделей (LLM), для задач проєктування та оптимізації траєкторій. У препринті (Simonds, 2025) вивчається застосування LLMs, посилених навчанням з підкріпленням (RL), для управління ракетами через симуляції. Розглядалися задачі оптимізації висоти та точної посадки, які вимагають ефективної оптимізації траєкторії. Стандартні LLMs показали базові інженерні знання, але не змогли ефективно оптимізувати траєкторію на основі симуляцій. Натомість, RL-навчені LLMs продемонстрували значно кращу здатність оптимізувати траєкторію, перевершивши базові моделі та експертів-людей. Це вказує на перспективність LLM-підходів з RL для автоматизації та ефективної оптимізації траєкторій ракет.

В інших дослідженнях розглядаються спрощені моделі траєкторій для концептуального проєктування ракет-носіїв. Наприклад, у роботі (Nailwal et al, 2022) представлено розробку двоступеневої ракети-носія, де особлива увага приділяється використанню та аналізу траєкторії типу "gravity turn" (гравітаційний розворот). Автори використовують спрощену 2D модель руху в середовищі MATLAB для вивчення впливу різних параметрів проєктування та управління на формування цієї траєкторії. Зокрема, аналізується вплив маневру гравітаційного розвороту, включаючи початковий кут тангажу (pitch kick angle) та висоту ініціації маневру. Важливо зазначити, що представлена модель використовує траєкторію "gravity turn" протягом усього польоту та опускає деякі фактори, такі як обертання Землі, що вказує на спрощену природу траєкторного аналізу в рамках цього дослідження, зосередженого на ранніх етапах проєктування.

Аналітичні методи розрахунку траєкторій ракет, що дозволяють отримати замкнені рішення або спрощені моделі для попереднього аналізу, розглядаються, наприклад, у роботах (Campos & Gil, 2018), де запропоновано чотири нових методи аналітичного розрахунку, та (Teofilatto et al., 2022), де аналітично виводяться траєкторії підйому та характеристики ракети-носія. Ці підходи є цінними для розуміння основних залежностей та попередньої оцінки програми тангажу.

Водночас, для досягнення високої точності та врахування складних обмежень широко використовуються чисельні методи оптимізації. Наприклад, застосування псевдоспектральної транскрипції для оптимізації траєкторії ракети Vega досліджено (de Volo et al., 2017). Задачі оптимального керування виведенням з урахуванням жорстких обмежень, що є типовими для реальних місій, розглядаються (Lu & Pan, 2010). Інтегрований підхід до оптимізації, що поєднує параметри твердопаливного двигуна першого ступеня та траєкторію виведення, представлений у роботі (Federici et al., 2021). Сучасні методи, такі як нейронні мережі та генетичні алгоритми, також знаходять застосування в оптимізації траєкторій, зокрема для задач повернення ступенів ракет (Tang & Gong, 2023).

Дослідження також фокусуються на розробці законів керування, як, наприклад, оптимальний закон керування з використанням гравітаційного розвороту (He & Lee, 2018), що є важливим для оптимального формування траєкторії. Окрім оптимізації, важливим аспектом є навігаційне забезпечення польоту, як показано в роботі (Ugolini, 2023) на прикладі розробки гібридної системи навігації.

Серед аналітичних підходів до формування саме програми тангажу слід відзначити попередню роботу авторів (Keba & Kulabukhov, 2024), де було запропоновано методичне забезпечення для визначення програми кута тангажу. Цей підхід базувався на апроксимації вертикальної та горизонтальної складових швидкості ракети-носія параболічними залежностями (рис. 1) від часу для формування неперервної програми керування.

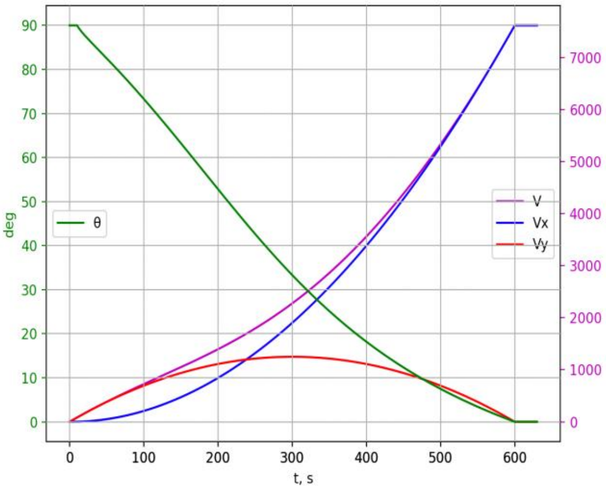

Рисунок 1 – Програма тангажу θ і складові швидкості параболічної форми для орбіти висотою 500 км (Джерело: Створено авторами)

Незважаючи на велику кількість досліджень, пошук ефективних аналітичних або напіваналітичних методів формування програми керування кутом тангажу, які б дозволяли проводити швидку оптимізацію на ранніх етапах проектування без залучення повномасштабного моделювання, залишається актуальним завданням. Дана робота продовжує дослідження у цьому напрямку та пропонує новий підхід до аналітичної постановки задачі побудови програми тангажу, що базується на моделі з п'ятьма ділянками руху та дозволяє проводити багатокритеріальну оптимізацію з урахуванням обмежень.

Мета та завдання

Метою цієї роботи є постановка задачі для отримання алгоритму побудови програми тангажу на проектних етапах розробки ракети-носія. Зазначене завдання складається з таких етапів:

– визначення вихідних даних (початкових умов);
– формулювання цілей моделювання (критеріїв оптимальності);
– визначення обмежень на рух ракети-носія;
– математична постановка задачі;
– вибір методів її розв'язання.

Дані та методи

Розгляд програми тангажу починається з початкового моменту часу $t_0 = 0$. Розглядається вертикальний старт, тобто початкове значення кута тангажу становить $\theta(t_0) = \frac{\pi}{2}$. Тягові характеристики ракети-носія вважаються відомими або заданими. Зміна абсолютної швидкості на активній ділянці траєкторії апроксимується функцією, близькою до параболічної залежності. Час початку повороту — t_1 — також задається як вхідний параметр, оскільки визначається масовими, геометричними та тяговими характеристиками ракети-носія. Його значення, як правило, лежить у межах від 10 до 30 секунд після старту.

У кінці активної ділянки траєкторії ракета-носій має задовольняти такі вимоги:

1. Досягнути заданої висоти H, яка лежить у діапазоні 200–800 км;

2. Мати кругову орбітальну швидкість V_k, що відповідає висоті H;

3. Мати нульові значення кутової швидкості та кутового прискорення по тангажу;

4. Мати значення кута тангажу, рівне нулю;

5. Мінімізувати витрати керуючої дії, необхідної для створення кутового прискорення протягом програми тангажу.

Постановка задачі супроводжується такими обмеженнями:

– тривалість вертикальної ділянки траєкторії має бути мінімальною для зменшення гравітаційних втрат та запобігання надмірно крутим траєкторіям;

– функції кута тангажу, кутової швидкості та кутового прискорення повинні бути неперервними та достатньо гладкими, що зумовлено фізичними характеристиками систем керування ракети-носія;

– кутова швидкість обмежується допустимими значеннями, пов’язаними з конструктивною міцністю ракети-носія, забезпеченням мінімальних поперечних перевантажень та згинальних моментів;

– кутове прискорення також має обмеження на максимальне значення, визначене фізичними можливостями систем керування.

Обговорення та результати

Програма тангажу розглядається як така, що складається з п’яти послідовних ділянок (рис. 2).

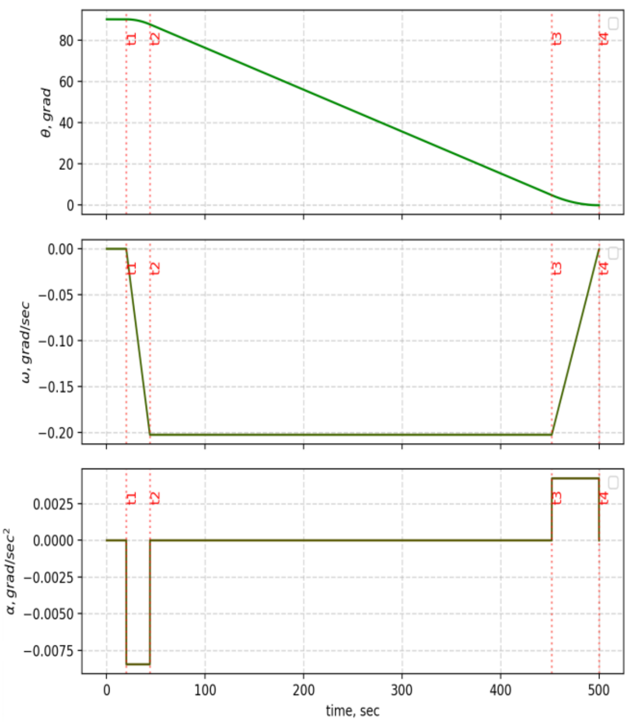

Рисунок 2 – Зміна кута тангажу, кутової швидкості на кутового прискорення на п’яти ділянках програми (Джерело: Створено авторами)

Ділянка 1 — $[0, t_1]$ — початкова ділянка вертикального руху. Кут тангажу на цій ділянці залишається постійним і дорівнює $\theta(t) = \frac{\pi}{2}$. Ця фаза зазвичай триває від 10 до 30 секунд.

Ділянка 2 — $[t_1, t_2]$ — фаза початку кутового руху. На цій ділянці ракета-носій набуває постійного кутового прискорення α_1, внаслідок чого кутова швидкість починає зростати.

Ділянка 3 — $[t_2, t_3]$ — основна фаза кутового руху. Кутове прискорення на цій ділянці дорівнює нулю: $\alpha_2 = 0$, а кутова швидкість $\omega_3 = \text{const} < 0$, тобто напрям обертання протилежний до зростання кута тангажу. Ця ділянка є найдовшою серед фаз активного кутового маневру.

Ділянка 4 — $[t_3, t_4]$ — фаза кутового гальмування. Кутова швидкість монотонно зменшується від ω_3 до нуля під дією додатного кутового прискорення $\alpha_4 > 0$.

Ділянка 5 — $[t_4, \dots]$ — заключна фаза польоту з постійним кутом тангажу, рівним нулю, та нульовими значеннями кутової швидкості і прискорення. Час завершення активного управління кутом тангажу t_4 лежить у межах 400–800 секунд.

Таким чином, змінними задачі є тривалості ділянок 2, 3 та 4 або розподіл часу активного кутового маневру на інтервалі $[t_1, t_4]$.

Абсолютна швидкість ракети-носія $V(t)$ подається у вигляді векторної суми вертикальної $V_v(t)$ та горизонтальної $V_h(t)$ складових. Кут тангажу визначається аналітичною формулою:

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{V_v(t)}{V_h(t)}\right) \quad (1)$$

На завершальній ділянці, при $t = t_4$, необхідно забезпечити виконання таких умов:

– інтегральна вертикальна складова швидкості $V_v(t)$ повинна забезпечити досягнення заданої висоти орбіти H;

– горизонтальна складова швидкості повинна дорівнювати круговій орбітальній швидкості: $V_h(t_4) = V_k$;

– кут тангажу має дорівнювати нулю: $\theta(t_4) = 0$;

– кутова швидкість ω та кутове прискорення α також повинні дорівнювати нулю при $t = t_4$.

Для зручності введемо безрозмірні коефіцієнти, які характеризують відносні тривалості фаз активного кутового маневру:

– k_2 — частка тривалості ділянки прискорення $[t_1, t_2]$ у загальному інтервалі $[t_1, t_4]$;

– k_3 — частка тривалості ділянки $[t_2, t_3]$ з постійною кутовою швидкістю;

– k_4 — частка тривалості ділянки $[t_3, t_4]$ гальмування.

Позначимо загальну тривалість фаз активного кутового маневру:

$$t_a = t_4 - t_1, \quad (2)$$

тоді з умови нормування маємо:

$$k_2 + k_3 + k_4 = 1, \quad (3)$$

а відповідні моменти часу можна записати як:

$$t_2 = t_1 + k_2 \cdot t_a, \quad (4.1)$$

$$t_3 = t_2 + k_3 \cdot t_a. \quad (4.2)$$

З метою забезпечення неперервності функцій кутової швидкості та прискорення, приймається, що кутове прискорення на ділянках $[t_1, t_2]$ та $[t_3, t_4]$ змінюється лінійно. Такий підхід узгоджується з фізичними обмеженнями на динаміку роботи органів керування ракети-носія та дозволяє уникнути розривів у керуванні.

Оскільки кут тангажу в інтервалі $[t_1, t_4]$ змінюється від $\theta = \frac{\pi}{2}$ до $\theta = 0$, повна зміна кута становить:

$$\Delta\theta = -\frac{\pi}{2} \quad (5)$$

Цю зміну можна подати через інтеграл від кутової швидкості:

$$\int_{t_1}^{t_4} \omega(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \omega_2(t)\, dt + \int_{t_2}^{t_3} \omega_3\, dt + \int_{t_3}^{t_4} \omega_4(t)\, dt. \quad (6)$$

На ділянці $[t_1, t_2]$ кутова швидкість змінюється лінійно від нуля до ω_3, а на ділянці $[t_3, t_4]$ — від ω_3 до нуля. Ураховуючи це, інтеграли набувають вигляду:

$$\int_{t_1}^{t_2} \omega_2(t)\, dt = \frac{\omega_3}{2}(t_2 - t_1), \quad (7)$$

$$\int_{t_2}^{t_3} \omega_3\, dt = \omega_3(t_3 - t_2), \quad (8)$$

$$\int_{t_3}^{t_4} \omega_4(t)\, dt = \frac{\omega_3}{2}(t_4 - t_3). \tag{9}$$

Таким чином, повна зміна кута становить:

$$\Delta\theta = \frac{\omega_3}{2}(t_2 - t_1) + \omega_3(t_3 - t_2) + \frac{\omega_3}{2}(t_4 - t_3) =$$
$$= \frac{\omega_3}{2}(t_4 + t_3 - t_2 - t_1). \tag{10}$$

Враховуючи введені раніше позначення (4) отримаємо:

$$t_4 + t_3 - t_2 - t_1 =$$
$$= t_4 + t_1 + (k_2 + k_3)t_a - (t_1 + k_2 t_a) - t_1 = t_a(1 + k_3). \tag{11}$$

Підставляючи у (10):

$$\Delta\theta = \frac{\omega_3}{2} t_a(1 + k_3) = -\frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

звідки виражається кутова швидкість на ділянці з постійним значенням:

$$\omega_3 = -\frac{\pi}{t_a(1+k_3)}. \tag{13}$$

Таким чином, значення кутової швидкості ω_3 однозначно визначається через тривалість інтервалу активного кутового руху t_a та коефіцієнт k_3, що характеризує відносну довжину ділянки з постійною кутовою швидкістю. При фіксованих значеннях t_1 та t_4, параметр ω_3 залежить лише від розподілу фаз кутового руху в межах інтервалу програмного керування.

Аналітичні вирази для функції кута тангажу

Функція кута тангажу $\theta(t)$ на кожній з ділянок траєкторії визначається характером кутового руху. Для побудови безрозривної функції кута та її похідних розглянемо поведінку $\theta(t)$ на кожній ділянці окремо.

Ділянка 1: вертикальний рух. На першому етапі $t \in [t_0, t_1]$ ракета рухається вертикально, і кут тангажу залишається постійним:

$$\theta(t) = \theta_1 = \frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Ділянка 2: кутове прискорення. На інтервалі $t \in [t_1, t_2]$ реалізується кутове прискорення α_2, при якому кутова швидкість змінюється лінійно від нуля до ω_3. Кутове прискорення:

$$\alpha_2 = \frac{\omega_3}{t_2 - t_1}. \tag{15}$$

Кутова швидкість:

$$\omega(t) = \alpha_2(t - t_1). \tag{16}$$

Інтегруючи цю функцію, отримаємо:

$$\theta(t) = \theta_1 + \int_{t_1}^{t} \omega(t)\, dt = \theta_1 + \alpha_2 \cdot \frac{(t-t_1)^2}{2}. \tag{17}$$

Ураховуючи залежність (15), маємо:

$$\theta(t) = \theta_1 + \frac{\omega_3}{2k_2 t_a}(t - t_1)^2. \tag{18}$$

Ділянка 3: постійна кутова швидкість. На інтервалі $t \in [t_2, t_3]$ кутова швидкість залишається сталою:

$$\omega(t) = \omega_3 = \mathrm{const}, \tag{19}$$

а кут тангажу змінюється лінійно:

$$\theta(t) = \theta_2 + \omega_3(t - t_2), \tag{20}$$

де $\theta_2 = \theta(t_2)$ – кут тангажу в момент закінчення ділянки 2. Враховуючи (4.1), отримаємо:

$$\theta(t) = \theta_2 + \omega_3(t - t_1 - k_2 t_a). \tag{21}$$

Ділянка 4: кутове гальмування. На заключному інтервалі $t \in [t_3, t_4]$ здійснюється рівномірне гальмування до нульової кутової швидкості:

$$\alpha_4 = -\frac{\omega_3}{t_4 - t_3}, \tag{22}$$

$$\omega(t) = \omega_3 + \alpha_4(t - t_3). \tag{23}$$

Інтегруючи:

$$\theta(t) = \theta_3 + \omega_3(t - t_3) + \frac{\alpha_4}{2}(t - t_3)^2 \tag{24}$$

де $\theta_3 = \theta(t_3)$ – кут тангажу в момент закінчення ділянки 3.

Підставивши (22), маємо:

$$\theta(t) = \theta_3 + \omega_3(t - t_3) - \frac{\omega_3}{2(t_4 - t_3)}(t - t_3)^2. \tag{25}$$

Враховуючи (2) та (4.2), остаточна форма:

$$\theta(t) = \theta_3 + \omega_3(t - t_1 - (k_2 + k_3)t_a) -$$
$$- \frac{\omega_3}{2(1 - k_2 - k_3)t_a}(t - t_1 - (k_2 + k_3)t_a)^2. \tag{26}$$

Функція висоти

Функція висоти, яку досягає ракета-носій у результаті виконання заданої програми тангажу, визначається інтегралом вертикальної складової швидкості руху:

$$H_{\mathrm{prog}} = \int_{t_0}^{t_4} V(t) \sin(\theta(t))\, dt, \tag{27}$$

де $V(t)$ — абсолютна швидкість ракети, а $\theta(t)$ — кут тангажу в момент часу t. Значення H_{prog} розбивається на суму чотирьох складових, що відповідають окремим ділянкам програми:

$$H_{\mathrm{prog}} = H_1 + H_2 + H_3 + H_4, \tag{28}$$

де:

$$H_1 = \int_{t_0}^{t_1} V(t) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} V(t)\, dt, \tag{29}$$

$$H_2 = \int_{t_1}^{t_2} V(t) \sin(\theta_2(t))\, dt, \tag{30}$$

$$H_3 = \int_{t_2}^{t_3} V(t) \sin(\theta_3(t))\, dt, \tag{31}$$

$$H_4 = \int_{t_3}^{t_4} V(t) \sin(\theta_4(t))\, dt. \tag{32}$$

З урахуванням одержаних вище виразів для функцій кута тангажу(14, 18, 21, 26) на відповідних ділянках маємо:

$$H_2 = \int_{t_1}^{t_2} V(t) \sin\left(\theta_1 + \frac{\omega_3}{2k_2 t_a}(t - t_1)^2\right) dt, \tag{33}$$

$$H_3 = \int_{t_2}^{t_3} V(t) \sin(\theta_2 + \omega_3(t - t_1 - k_2 t_a))\, dt, \tag{34}$$

$$H_4 = \int_{t_3}^{t_4} V(t) \sin\Big(\theta_3 + \omega_3(t - t_1 - (k_2 + k_3)t_a) -$$
$$- \frac{\omega_3}{2(1 - k_2 - k_3)t_a}(t - t_1 - (k_2 + k_3)t_a)^2\Big)\, dt. \tag{35}$$

На основі вищевикладеного сформулюємо задачу оптимізації. Цільова функція для оптимізації задається у вигляді квадрата відхилення досягнутої висоти від заданої:

$$J_H(k_2, k_3, t_1, t_4) = \left(H_{\mathrm{prog}}(k_2, k_3, t_1, t_4) - H\right)^2. \tag{36}$$

Для забезпечення фізичної допустимості розв'язку вводяться обмеження:

$$0 < k_2 < 1, \quad 0 < k_3 < 1, \quad k_2 + k_3 < 1, \tag{37}$$

$$t_0 < t_1 < t_4. \tag{38}$$

З метою підвищення ефективності функціонування системи керування ракети-носія та зменшення енергетичних витрат, до задачі оптимізації додається ще один критерій якості — мінімізація сумарної роботи керуючої дії на ділянках траєкторії, де присутнє кутове прискорення (ділянки 2 та 4).

Робота керуючої дії визначається інтегралом добутку моменту керування $M(t)$ на кутову швидкість $\omega(t)$:

$$W = -\int_{t_1}^{t_2} M(t)\, \omega(t)\, dt - \int_{t_3}^{t_4} M(t)\, \omega(t)\, dt, \tag{39}$$

Оскільки момент керування пропорційний кутовому прискоренню:

$$M(t) = J\, \alpha(t), \tag{40}$$

де J — момент інерції ракети-носія відносно центра мас, а кутове прискорення є сталою величиною на кожній із розглянутих ділянок, сумарна робота виражається аналітично як:

$$W = J\, \omega_3^2. \tag{41}$$

Враховуючи (2) і (13) сумарна робота керуючої дії записується у вигляді функції змінних оптимізації:

$$W(k_2, k_3, t_1, t_4) = J\, \frac{\pi^2}{t_a^2(1+k_3)^2}. \tag{42}$$

На основі цього вводиться ще одна цільова функція мінімізації:

$$J_{\mathrm{ctrl}}(k_2, k_3, t_1, t_4) = J \frac{\pi^2}{t_a^2(1+k_3)^2} \quad (43)$$

Таким чином, задачі оптимізації відповідають дві окремі цільові функції:

– мінімізація відхилення досягнутої висоти від заданої,
– мінімізація сумарної роботи керуючої дії.

Подальше рішення задачі може розглядати їх окремо або у вигляді багатокритеріальної оптимізації.

Висновки

У межах цієї роботи сформульовано задачу побудови програми тангажу ракети-носія з урахуванням вимог до виведення на кругову орбіту. Здійснено поетапну постановку задачі, що включає визначення вхідних параметрів, формулювання критеріїв якості у вигляді мінімізації відхилення досягнутої висоти від заданої, врахування фізичних обмежень на параметри програми та вибір відповідних чисельних методів розв'язання. Для побудови функціональної залежності кута тангажу розроблено аналітичну модель з розбиттям траєкторії на п'ять ділянок руху, що забезпечує неперервність кутової швидкості та прискорення.

Отримана модель дозволяє здійснювати оптимізацію програми тангажу на проєктному етапі, не потребуючи повної динамічної моделі польоту. Використання розглянутих підходів забезпечує узгодженість між аналітичною простотою і точністю досягнення цільових умов. Розроблена постановка може бути використана як складова частина більш загальної задачі синтезу траєкторії виведення або як базис для подальшої деталізації з урахуванням додаткових впливів.

Майбутні дослідження

Отримані в роботі аналітичні вирази для цільових функцій, таких як функціонал відхилення кінцевої висоти від заданої (J_H) та функціонал інтегральних витрат керуючої дії (J_{ctrl}), є основою для задачі багатокритеріальної оптимізації.

У подальших дослідженнях передбачається розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації для визначення оптимальних значень параметрів k_2, k_3, t_1, t_4, що впливають на формування програми тангажу.

Одним із базових підходів є зведення задачі до однокритеріальної шляхом побудови зваженої суми критеріїв з відповідними коефіцієнтами вагомості. Такий підхід дозволяє застосовувати класичні чисельні методи, зокрема градієнтні алгоритми, метод Ньютона або координатний спуск. Альтернативно, можливо використати метод ε-обмежень, який дозволяє побудувати множину допустимих компромісних рішень, змінюючи допустимий рівень одного з критеріїв.

Для дослідження структури множини Парето-оптимальних рішень та оцінки взаємозалежності критеріїв можливо застосування методів глобального пошуку, зокрема генетичних алгоритмів, методу рою частинок, диференціальної еволюції або методу імітації відпалу. Зазначені підходи є придатними для задач із складним аналітичним виглядом цільових функцій та не потребують обчислення похідних, що робить їх зручними в умовах високої обчислювальної складності.

Крім того, доцільним є проведення аналізу чутливості параметрів для оцінки їхнього впливу на результат та виявлення найбільш критичних змінних. У разі складності прямого обчислення функції H_{prog} може бути застосована апроксимація або побудова сурогатної моделі для зменшення обчислювальних витрат при пошуку оптимуму.

Обраний метод оптимізації має забезпечувати визначення таких значень параметрів k_2, k_3, t_1, t_4, за яких побудована програма тангажу відповідає кінцевим умовам задачі (досягнення заданої кругової орбіти) та мінімізує обраний критерій оптимальності (наприклад, відхилення висоти, витрати керування або їх комбінацію).

Подальші дослідження також будуть спрямовані на постановку та розв'язання комплексної задачі оптимізації програми тангажу. Ця задача передбачатиме інтеграцію розробленого в даній роботі аналітичного підходу до синтезу програми керування з повною динамічною моделлю ракети-носія. Такий комплексний підхід дозволить враховувати конкретні масові, тягові, аеродинамічні та конструктивні характеристики ракети, а також деталізовані вимоги до кінцевих параметрів орбіти (висота, швидкість, кут нахилу траєкторії, ексцентриситет тощо) для виведення космічного апарата. Розв'язання цієї комплексної задачі дозволить отримувати оптимальні траєкторії, що максимально відповідають можливостям ракети-носія та вимогам конкретної місії виведення на кругову орбіту.

References

Campos, L. M. B. C., & Gil, P. J. (2018). On four new methods of analytical calculation of rocket trajectories. *Aerospace*, *5*(3), 88. https://doi.org/10.3390/aerospace5030088

de Volo, G. D. C. B., Naeije, M., Roux, C., & Volpi, M. (2017, September). Vega launchers' trajectory optimization using a pseudospectral transcription. In *Proceedings of the European Conference for Aeronautics and Space Sciences* (pp. 1–15). https://doi.org/10.13009/EUCASS2019-710

Federici, L., Zavoli, A., Colasurdo, G., Mancini, L., & Neri, A. (2021). Integrated optimization of first-stage SRM and ascent trajectory of multistage launch vehicles. *Journal of Spacecraft and Rockets*, *58*(3), 786–797. https://doi.org/10.2514/1.A34930

He, S., & Lee, C. H. (2018). Gravity-turn-assisted optimal guidance law. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, *41*(1), 171–183. https://doi.org/10.2514/1.G002949

Keba, R., & Kulabukhov, A. (2023). Analysis of the methods and models of movement of rocket launchers in the active section of the trajectory [In Ukrainian]. *Journal of Rocket-Space Technology*, *32*(4), 76–82. https://doi.org/10.15421/452331

Keba, R., & Kulabukhov, A. (2024). Methodological support for determining the pitch angle program of a launch vehicle during the insertion of spacecraft into circular orbits. *Journal of Rocket-Space Technology*, *33*(4–29), 80–85. https://doi.org/10.15421/452454

Lu, P., & Pan, B. (2010). Highly constrained optimal launch ascent guidance. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, *33*(2), 404–414. https://doi.org/10.2514/1.45632

Malyuta, D., Acikmese, B. T., Bewley, B. T., & Murray, R. W. (2022, October). Convex optimization for trajectory generation: A tutorial on generating dynamically feasible trajectories reliably and efficiently. *IEEE Control Systems Magazine, 42*(5), 40-113. https://doi.org/10.1109/MCS.2022.3187542

Malyuta, D., Yu, Y., Elango, P., & Açıkmeşe, B. (2021). Advances in trajectory optimization for space vehicle control. *Annual Reviews in Control*, *52*, 282–315. https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2021.04.013

Nailwal, P., Budhaulia, P. N., Kumar, R., & Singh, R. K. (2022). Designing of a two stage to orbit launch vehicle. *International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET), 14*(3), 1-13. https://doi.org/10.17605/OSF.IO/HC46T

Simonds, T. (2025). LLMs for engineering: Teaching models to design high powered rockets [Preprint]. *arXiv*. https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.19394

Tang, D., & Gong, S. (2023). Trajectory optimization of rocket recovery based on neural network and genetic algorithm. *Advances in Space Research*, *72*(8), 3344–3356. https://doi.org/10.1016/j.asr.2023.07.028

Teofilatto, P., Carletta, S., & Pontani, M. (2022). Analytic derivation of ascent trajectories and performance of launch vehicles. *Applied Sciences*, *12*(11), 5685. https://doi.org/10.3390/app12115685

Ugolini, O. (2023). *Design and implementation of a rocket launcher hybrid navigation* [MSc Thesis]. KTH Royal Institute of Technology https://urn.kb.se/resolve?urn=urn%3Anbn%3Ase%3Akth%3Adiva-340459