*Challenges and Issues of Modern Science*
*2025, Vol. 4, No. 1, XX–YY*
*ISSN: 3083-5704*
*URL: https://cims.fti.dp.ua/j/article/view/314*
*PURL: https://purl.org/cims/4.314*

**This is an Ahead of Print version**

UDC 519.8

# Про модифікацію прямих методів розв'язання задач оптимального керування стаціонарними тепловими процесами

**Людмила Гарт, Анна Бугаєнко**

**Purpose**. The aim of the study is to apply modified gradient-type methods to problems of optimal control of one-dimensional stationary thermal processes and to conduct a comparative analysis of the effectiveness of the classical and modified approaches using the example of solving specific problems. **Design / Method / Approach**. The research is focused on the development and numerical implementation of approximation-iteration algorithms based on the grid method for the analysis of controlled thermostatic systems modeled by differential equations with variable coefficients. For the numerical solution of the primary and adjoint boundary value problems, second-order accuracy difference schemes are used. To find the lower boundary of the objective functional, gradient-type minimization methods are used, both with and without control constraints. **Findings**. The proposed modified computational schemes demonstrate an increase in the efficiency of the classical grid method in terms of the amount of required computational costs and the accuracy of the obtained approximate solutions. **Theoretical Implications**. Expanding the possibilities of applying theoretically substantiated direct methods of accelerated convergence to solving optimal control problems of stationary thermal processes. **Practical Implications**. Creating an effective computational tool for solving optimal control problems of stationary thermal processes, which can be applied in practice. **Originality / Value**. Implementation of new computational schemes of accelerated convergence of modified gradient-type methods for the specified class of optimal control problems. **Research Limitations / Future Research**. The research limitations are due only to the properties of the programming language and software used. Further research involves applying the proposed modified approach to solving more complex optimal control problems, including multidimensional and phase-constrained ones. **Article Type.** Applied Research.

**Keywords:**

stationary thermal process, control, system state, objective functional, gradient method, modified algorithm, efficiency

---

**Мета**. Дослідження спрямоване на застосування модифікованих методів градієнтного типу до задач оптимального керування одновимірними стаціонарними тепловими процесами та порівняльний аналіз ефективності класичного й модифікованого підходів на прикладі розв'язання конкретних задач. **Дизайн / Метод / Підхід**. Стаття присвячена розробці та числовій реалізації апроксимаційно-ітераційних алгоритмів, основаних на методі сіток, для аналізу керованих термостатичних систем, що моделюються диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами. Для числового розв'язання основних та спряжених крайових задач використано різницеві схеми другого порядку точності. Для відшукання нижньої грані цільового функціонала використано методи мінімізації градієнтного типу як в умовах обмежень на керування, так і без обмежень. **Результати**. Запропоновані модифіковані обчислювальні схеми демонструють підвищення ефективності класичного сіткового методу з погляду на кількість затребуваних обчислювальних витрат та точність отримуваних наближених розв'язків. **Теоретичне значення**. Розширення можливостей застосування теоретично обґрунтованих прямих методів пришвидшеної збіжності до розв'язання задач оптимального керування стаціонарними тепловими процесами. **Практичне значення**. Створення ефективного обчислювального інструменту для розв'язання задач оптимального керування стаціонарними тепловими процесами, що може бути застосований на практиці. **Оригінальність / Цінність**. Реалізація нових обчислювальних схем пришвидшеної збіжності щодо модифікованих методів градієнтного типу для зазначеного класу задач оптимального керування. **Обмеження дослідження / Майбутні дослідження**. Обмеження дослідження зумовлені лише властивостями використаної мови програмування та програмного забезпечення. Подальші дослідження передбачають застосування запропонованого модифікованого підходу до розв'язання більш складних задач оптимального керування, у тому числі багатовимірних та з фазовими обмеженнями. **Тип статті**. Прикладне дослідження.

**Ключові слова:**

стаціонарний тепловий процес, керування, стан системи, цільовий функціонал, градієнтний метод, модифікований алгоритм, ефективність

---

## On the modification of direct methods for solving optimal control problems of stationary thermal processes

**Contributor Details:**

Liudmyla Hart, Dr. Sc., Prof., Oles Honchar Dnipro National University: Dnipro, UA, ll_hart@ukr.net
Anna Buhaienko, Undergrad. Stud., Oles Honchar Dnipro National University: Dnipro, UA, anndpua8@gmail.com

*Received: 2025-05-22* *Revised: 2025-06-02* *Accepted: 2025-06-04*

*Copyright © 2025 Authors.*
*This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.*

Одним із ключових напрямів сучасної теорії керування є оптимальне керування, яке знаходить широке застосування у техніці, економіці, екології та інших галузях. Його основна мета полягає у знаходженні таких стратегій впливу на систему керування, які забезпечують досягнення бажаного результату за мінімальних витрат або з максимальним ефектом.

Задачі оптимального керування особливо актуальні у сфері теплових процесів, де зазвичай потрібно знайти найкращий розподіл температури відповідно до заданих умов. Серед таких задач важливий клас утворюють задачі оптимального керування процесами термостатики, в яких температура не залежить від зміни часу. Процеси стаціонарного розподілу тепла мають широкий спектр застосувань у фізиці, інженерії, геофізиці, біомедицині; вони є важливою складовою сучасних технологій управління тепловими процесами в різноманітних системах, включаючи промислові виробництва, будівництво, автомобільну промисловість та багато інших галузей (Fontes et al., 2019). Наприклад, оптимальне керування термостатом в системі кондиціонування дозволяє автоматично регулювати температуру та вологість у приміщенні (Hou et al., 2022). У промисловості оптимальне керування теплообмінниками дозволяє підтримувати температурні умови в системі, забезпечуючи ефективність виробничих процесів та зниження витрат енергії. Застосування оптимального керування термостатом в системах опалення дозволяє ефективно регулювати температуру в будівлях, зменшуючи енергоспоживання та витрати на опалення (Neittaanmaki et al., 2006). В автомобільній та авіаційній промисловості оптимальне керування термостатом дозволяє забезпечити комфортні умови для пасажирів та екіпажу, знижуючи витрати палива та забезпечуючи безпеку та ефективність транспортного засобу, а в агропромисловості дозволяє забезпечити оптимальні умови для росту та розвитку рослин, збільшуючи врожайність та зменшуючи витрати на енергію (Baranovskii et al., 2024). У цілому, розв'язання задач оптимального керування процесами термостатики дозволяє отримати оптимальні параметри керування системою терморегуляції, які забезпечують досягнення заданих цілей. Ці параметри можуть включати оптимальні часові розклади включення/вимкнення обігрівачів або кондиціонерів, налаштування температурних режимів, розподіл теплових потоків тощо. Водночас важливим аспектом залишаються питання ефективності методів, використовуваних для розв'язання таких задач.

На сьогоднішній день існує багато підходів до розв'язання задач оптимального керування процесами термостатики, як аналітичних, так і чисельних (Baldini et al., 2025). Оскільки точний розв'язок таких задач може бути отриманий лише в окремих випадках, то найбільш актуальним є використання наближених методів розв'язання, серед яких розрізняють прямі та непрямі. Зазначені методи відрізняються підходами до пошуку розв'язків задачі оптимального керування. Непрямі методи передбачають розв'язання крайової задачі необхідних умов оптимальності, в той час як прямі методи не вимагають безпосереднього використання необхідних умов. Прямі методи не потребують складання спряженої системи рівнянь, системи керування та умов трансверсальності і зводять оптимізаційну задачу до побудови мінімізуючої (чи максимізуючої) послідовності, на підставі якої за допомогою граничного переходу може бути отримано точний розв'язок задачі оптимального керування.

Результати сучасних досліджень як теоретичного, так і прикладного характеру, стосовно задач оптимального керування термостатичними системами містяться у багатьох роботах. Зокрема, стаття (Abidi & Satouri, 2023) фокусується на новому числовому методі, основаному на спектральному методі дискретизації задачі керування з наступним використанням розширеного методу релаксації для забезпечення збіжності. У роботі (Hu et al., 2024) досліджуються числові методи розв'язання задачі оптимального розподілу керування стаціонарним джерелом тепла або холоду, основані на методі скінченних елементів дискретизації задачі та розробленій неточній ітераційній стратегії для апроксимації оптимального розв'язку. На підставі проведеного аналізу автори пропонують адекватний критерій вибору розмірів сітки дискретизації для завершення ітерацій, що забезпечує точність наближених розв'язків, яка відповідає рівню дискретизації. У статті (Titouche et al., 2015) розглядається оптимальне регулювання великих теплових процесів із використанням методу релаксації у поєднанні з методом стрільби для розв'язання задачі оптимального керування, коли змінна стану підпорядковується деяким обмеженням.

Значна увага у дослідженнях приділяється також методам регуляризації для розв'язання задач оптимального керування термостатичними системами за наявності обмежень на стан та/або керування, що призводить до чисельних і аналітичних труднощів. Для усунення цих перешкод у роботах (Vallejos, 2012; Kien et al., 2023) запроваджується регуляризація Лаврентьєва та вивчається порядок збіжності розв'язків на основі певних аргументів представлення джерела та багатосіткових процедур; у (Gangl et al., 2025) параметр регуляризації пов'язується з розміром сітки скінченних елементів для забезпечення оптимального балансу між помилкою та вартістю, а також формулюються варіаційні нерівності першого роду для визначення невідомого стану, з якого на етапі постобробки обчислюється керування. Залежно від структури диференціального рівняння використовуються різні методи регуляризації та пропонуються оцінки швидкості збіжності.

У цій статті досліджується питання про застосування апроксимаційно-ітераційного підходу до розв'язання задач оптимального керування одновимірними стаціонарними тепловими процесами. При цьому в ролі апроксимаційного методу пропонується використовувати метод сіток, а в ролі ітераційного – певний метод градієнтного типу для мінімізації функціонала якості. Запропонований тут підхід укладається у загальну схему проєкційно-ітераційних методів розв'язання задач мінімізації з обмеженнями у гільбертових просторах, започаткованих у роботах С. Д. Балашової (Balashova, 1996) та пізніше теоретично обґрунтованих у застосуванні до задач оптимального керування в працях представників її наукової школи (E. Hart, 2017; L. Hart, 2013, 2017, 2022; Hart & Yatsechko, 2021). Реалізована у роботі модифікація методів градієнтного типу супроводжується детально описаними обчислювальними технологіями, які дозволили довести ідею проєкційно-ітераційного підходу до успішних розрахунків. Проведено порівняльний аналіз класичного та модифікованого варіантів зазначених методів з урахуванням точності отримуваних наближених розв'язків, кількості необхідних ітерацій і часу виконання обчислень.

## Теоретичні відомості

Наведемо попередньо деяку загальну термінологію, вживану під час досліджень задач теплопровідності, у тому числі задач про стаціонарний розподіл тепла. Терміном «теплопровідність» визначають деякий процес перенесення тепла в неперервному середовищі з нерівномірним розподілом температури, що здійснюється внаслідок теплового руху елементарних частинок речовини (Karwa, 2020).

Теплопровідність описується коефіцієнтом теплопровідності $\lambda$, що є фізичною характеристикою матеріалу. Окрім цього, у нестаціонарних задачах використовується коефіцієнт температуропровідності $a$, який є фізичним параметром та характеризує швидкість зміни температури в середовищі. Коефіцієнт температуропровідності визначає міру термічної інерції матеріалу та впливає на динаміку розповсюдження тепла. Диференціальне рівняння, яке описує велику кількість задач теплопровідності, для декартової системи координат має вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1)$$

де $\frac{\partial T}{\partial t}$ – швидкість зміни температури в часі, $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коефіцієнт температуропровідності, $\lambda$ – коефіцієнт теплопровідності, $q_v$ – потужність внутрішніх джерел, $c$ – питома теплоємність, $\rho$ – густина. Водночас рівняння (1) передбачає використання незмінних значень теплофізичних характеристик. Для більш складних ситуацій, коли теплофізичні властивості змінюються, застосовують загальну форму рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c\rho} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right)\right) + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (2)$$

Зауважимо, що повний математичний опис задач теплопровідності складається з рівняння (1) або (2) та умов однознач-

ності. У теорії теплопровідності на позначення сукупності значень температур у всіх точках деякої заданої області простору в певний момент часу використовують таке поняття, як температурне поле (Karwa, 2020). Відомо, що тепловий процес або температурне поле, можуть бути як стаціонарними, так і нестаціонарними. Стаціонарним тепловим процесом вважають процес, температура якого не залежить від зміни часу $t$, тобто температура задається функцією, залежною лише від деяких просторових координат. Математично це означає, що похідна температури за часом є нульовою: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Водночас у природі здебільшого переважають нестаціонарні теплові процеси. Їх математичний опис є достатньо складним, тому зазвичай, задля спрощення розрахунків, аналізують умовно стаціонарні процеси. Стаціонарні теплові процеси іноді називають процесами термостатики, що більш відображає їх фізичний зміст.

## Проблематика та цілі

Найрозповсюдженими прямими методами розв'язання задач оптимального керування є градієнтні методи та різні їх варіації. Однак, як відомо, основним недоліком градієнтних методів є досить повільна збіжність, особливо поблизу точки екстремуму. Тому актуальними є питання розробки та вдосконалення модифікацій цих методів з метою покращення їх ефективності. Суть досліджуваного в цій роботі проєкційно-ітераційного (апроксимаційно-ітераційного) підходу полягає у заміні вихідної екстремальної задачі послідовністю апроксимуючих її сіткових задач на сукупності сіток, що подрібнюються, та застосуванні певного методу мінімізації градієнтного типу до кожної з «наближених» екстремальних задач. При цьому пропонується будувати лише декілька наближень до розв'язку кожної з «наближених» задач і використовувати останнє з цих наближень у ролі початкового наближення в ітераційному процесі для наступної «наближеної» задачі. Послідовність відповідних кусково-лінійних інтерполянтів пропонується розглядати як послідовність наближень до розв'язку вихідної екстремальної задачі.

**Метою роботи** є дослідження ефективності апроксимаційно-ітераційних методів градієнтного типу у застосуванні до задач оптимального керування одновимірними стаціонарними тепловими процесами та їх порівняння з відповідним класичним підходом на прикладі розв'язання модельних задач.

Для досягнення поставленої мети виділимо наступний перелік основних **завдань**:

– розробити модифіковані алгоритми градієнтного типу для розв'язання задач оптимального керування;

– програмно реалізувати розроблені класичні та модифіковані алгоритми;

– провести низку чисельних експериментів, визначити оптимальні стратегії вибору параметрів у модифікованих алгоритмах та порівняти результати, отримані двома підходами, за критеріями точності, кількістю необхідних ітерацій, часом виконання розрахунків, а також за візуалізацією.

Задля реалізації окресленої мети у роботі були використані апарат та методи теорії керування, методи розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, методи чисельного інтегрування для обчислення функціонала та відповідні методи оптимізації.

Враховуючи зазначене, можна висунути наступну **гіпотезу**: для розглядуваного класу задач керування модифікований підхід виявиться більш ефективним, з точки зору обчислювальних витрат, порівняно з традиційним підходом.

**Наукова новизна** даного дослідження полягає у реалізації нових обчислювальних схем пришвидшеної збіжності модифікованих методів градієнтного типу для задач оптимального керування стаціонарними тепловими процесами та у аналізі їх ефективності.

## Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимального керування процесом термостатики, який відбувається в однорідному стрижні довжиною $l$ $(0 \le x \le l)$ із заданою температурою на лівому $(x = 0)$ та правому $(x = l)$ кінцях. Потрібно, керуючи температурою внутрішніх джерел тепла, привести температурний режим $u(x)$ у стрижні якомога ближче до заданого режиму $\varphi(x)$.

Математичне формулювання цієї задачі має такий вигляд: мінімізувати функціонал

$$J(v) = \int_0^l \big(u(x;v) - \varphi(x)\big)^2 dx, \tag{3}$$

за умов

$$Lu = f(x) + v(x),\ x \in (0,l), \tag{4}$$

$$u(0) = g_0, u(l) = g_l, \tag{5}$$

де $l > 0$ – задана стала; $g_0, g_l$ – задані сталі; $\varphi(x)$ – задана функція бажаного розподілу температури у стрижні; $f(x)$ – задана функція, що описує дію внутрішніх джерел тепла у стрижні; $v \equiv v(x)$ – шукана функція керування внутрішніми джерелами тепла; $u \equiv u(x) \equiv u(x;v)$ – шукана функція стану (температури), що знаходиться під впливом керування $v(x)$ на проміжку $[0,\ l]$.

Дія диференціального оператора $L$ у рівнянні (4) визначається формулою

$$Lu = -\frac{d}{dx}\Big(k(x)\cdot\frac{du}{dx}\Big) = -\big(k(x)\cdot u'(x)\big)', \tag{6}$$

де $k(x)$ – змінний коефіцієнт теплопровідності у точках стрижня, за умови $k(x) \ge c_1,\ x \in (0,l)$, де $c_1 > 0$ – деяка стала величина.

Задачу оптимального керування (2)–(6) будемо розглядати у двох постановках:

– за відсутністю обмежень на керування: $v(x) \in\in L_2[0,l]$;

– за наявністю обмежень виду:

$$v \equiv v(x) \in V = \{v(x) \in L_2[0,l]: \\ 0 \le v \le v_{max},\ x \in [0,l]\}, \tag{7}$$

де $v_{max} > 0$ – задане значення.

Відомо (Samarskii & Vabishchevich, 2007), що узагальнений розв'язок $u \equiv u(x;v)$ крайової задачі (4)–(6) існує та єдиний у просторі Соболева $W_2^{(1)}[0,l]$ за будь-якого допустимого керування $v(x) \in V$ і неперервно залежить від керування, правої частини та граничних умов; функціонал (3) за умов (4)–(6) є опуклим і неперервно диференційованим на множині $V \subseteq L_2[0,l]$, причому його градієнт у кожній точці $v \equiv v(x) \in V$ може бути поданий у вигляді

$$J'(v) = 2p(x),\ x \in [0,l], \tag{8}$$

де функція $p \equiv p(x)$ є узагальненим розв'язком спряженої крайової задачі

$$Lp = u(x) - \varphi(x),\ x \in (0,l); \tag{9}$$

$$p(0) = 0,\ p(l) = 0. \tag{10}$$

Отже, обчислення градієнта $J'(v)$ функціонала (3) за умов (4)–(6) у точці $v \equiv v(x) \in V$ потребує послідовного розв'язання двох лінійних крайових задач: основної задачі (4)–(6) відносно функції стану системи $u \equiv u(x;v),\ x \in [0,l]$ та спряженої задачі (9), (10) відносно функції імпульсу системи $p \equiv p(x;v)$, $x \in [0,l]$. Слід зазначити, що, якщо множина допустимих керувань $V$ має вигляд (7), тобто опукла, замкнена та обмежена в просторі $L_2[0,l]$, то, за узагальненою теоремою Вейерштрасса, функціонал (3) за умов (4)–(7) досягає на $V$ своєї нижньої грані $J^* = \inf J(v),\ v \in V$, тобто за будь-якого $\varphi(x) \in L_2[0,l]$ існує оптимальний розв'язок $\big(v^*(x), u^*(x)\big),\ 0 \le x \le l$, задачі (3)–(7), такий, що $J(v^*) = J^*$, де $v^* \equiv v^*(x) \in V$ – оптимальне керування, $u^* \equiv u(x;v^*),\ x \in [0,l]$ – відповідна оптимальна фазова траєкторія системи.

## Методи розв'язання

Наведемо основний алгоритм методу умовного градієнта та алгоритм його апроксимаційно-ітераційної модифікації для розв'язання задачі оптимального керування (3)–(7) за наявності обмежень на керування.

### *Алгоритм методу умовного градієнта*

Підготовчий етап: задати початкове допустиме керування $v^{(0)}(x) \in V$, бажану точність обчислень $\varepsilon > 0$ та лічильник ітерацій $k = 0$.

1. Знайти на $[0, l]$ функцію стану $u^{(k)}(x)$ та спряжену функцію $p^{(k)}(x)$ як розв'язки крайових задач (4)–(6) та (9), (10) відповідно при $v(x) = v^{(k)}(x)$.

2. Визначити градієнт $J'(v^{(k)})$ функціонала згідно формули (8).

3. Знайти допоміжне керування $\hat{v}^{(k)}(x)$ як розв'язок задачі

$$\hat{v}^{(k)}(x) = \arg\min_{v(x)\in V} \langle J'(v^{(k)}), v\rangle.$$

З урахуванням виду допустимої множини керувань $V$ розв'язок цієї задачі для всіх $x \in [0, l]$ може бути знайдений в аналітичному вигляді:

$$\hat{v}^{(k)}(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } J'^{(v^{(k)})} > 0, \\ v_{max}, \text{якщо } J'^{(v^{(k)})} < 0, \\ \forall \tilde{v} \in [0, v_{max}], \text{якщо } J'^{(v^{(k)})} = 0, \end{cases}$$

4. Знайти нове наближення до оптимального керування:

$$v^{(k+1)}(x) = v^{(k)}(x) + \alpha_k\left(\hat{v}^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)\right),$$

де $\alpha_k$ $(0 \le \alpha \le 1)$ – кроковий множник, який має гарантувати монотонне спадання значень цільового функціонала $(J(v^{(k+1)}) < J(v^{(k)}))$.

5. Перевірити виконання критерію зупинки:

$$\left\|v^{(k+1)} - v^{(k)}\right\|_{L_2[0,l]} < \varepsilon.$$

Якщо нерівність не справджується, збільшити лічильник ітерацій $k := k + 1$ і перейти на п. 1.

6. Знайти на $[0, l]$ функцію стану $u^{(k+1)}(x)$ як розв'язок крайової задачі (4)–(6) при $v(x) = v^{(k+1)}(x)$ та спряжену функцію $p^{(k+1)}(x)$ як розв'язок крайової задачі (9), (10) при $u(x) = u^{(k+1)}(x)$.

7. Обчислити значення функціонала $J(v)$ за формулою (3) при $u(x) = u^{(k+1)}(x)$, визначити градієнт $J'(v^{(k+1)})$ та його норму $\left\|J'(v^{(k+1)})\right\|_{L_2[0,l]}$.

Алгоритм описано.

Зазначимо, що під час чисельної реалізації цього алгоритму було розглянуто два варіанти вибору $\alpha^{(k)}$: дроблення крокового множника та класичний спосіб його вибору, пов'язаний із відшуканням розв'язку допоміжної задачі одновимірної умовної мінімізації

$$g_k(\alpha_k) = \min_{0\le\alpha\le 1} g_k(\alpha), \qquad (11)$$

де $g_k(\alpha) \equiv J\left(v^{(k)}(x) + \alpha\left(\hat{v}^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)\right)\right)$.

Для знаходження значення функціонала $J(v)$ у роботі використовувалося правило чисельного інтегрування за узагальненою квадратурною формулою Сімпсона, а для розв'язання лінійних крайових задач (4)–(6) та (9), (10) – метод скінченних різниць другого порядку точності у поєднанні з методом прогонки (Samarskii, 2001).

Зауважимо, що аналогічний алгоритм може бути сформульований для градієнтного методу мінімізації функціонала (3) за умов (4)–(6) в разі відсутності обмежень на керування, з тією лише відмінністю, що, оминаючи п. 3 наведеного вище алгоритму, нове наближення до оптимального керування слід знаходити за формулою

$$v^{(k+1)}(x) = v^{(k)}(x) + \alpha_k \cdot J'^{(v^{(k)})}, \quad k = 0,1,\ldots,$$

де $\alpha^{(k)} > 0$ – стала, що гарантує монотонне спадання функціонала в процесі ітерацій.

### *Алгоритм модифікації методу умовного градієнта*

Підготовчий етап: задати значення $N_1, N_{max}$, де $N_1$ – початковий порядок дискретизації задачі, $N_{max}$ – кінцевий порядок дискретизації. Призначити сумарний лічильник ітерацій в алгоритмі $k_{sum} = 0$. Задати номер етапу $n = 1$.

1. Задати лічильник ітерацій на $n$-му етапі $k = 0$. Визначити крок дискретизації задачі $h_n = \frac{l}{N_n}$ та відповідну точність обчислень $\varepsilon_n = C \cdot h_n^2$, узгоджену з похибкою апроксимації, де $C > 0$ – константа пропорційності (параметр алгоритму); задати початкове наближення для сіткової функції керування $\tilde{v}^{(0)} = \left(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \ldots, v_{N_n}^{(0)}\right)$.

2. Виконати розрахунки для дискретизованої задачі керування з використанням алгоритму методу умовного градієнта з точністю обчислень $\varepsilon_n$ і визначити номер ітерації $k = k_n$, на якій справдиться нерівність $\left\|\tilde{v}^{(k)} - \tilde{v}^{(k-1)}\right\| < \varepsilon_n$.

3. Видати на друк величини
$n, N_n, h_n, \varepsilon_n, k_n, \tilde{v}^{(k_n)}, u^{(k_n)}, J_{h_n}\left(\tilde{v}^{(k_n)}\right), \left\|J'_{h_n}\left(\tilde{v}^{(k_n)}\right)\right\|$.

4. Збільшити сумарний лічильник ітерацій $k_{sum} := k_{sum} + k_n$.

5. Прийняти $N_{n+1} = 2 \cdot N_n$. Якщо $N_{n+1} > N_{max}$, то кінець роботи алгоритму, інакше перейти до п. 6.

6. Виконати кусково-лінійну інтерполяцію сіткової функції керування $\tilde{v}^{(k_n)} = \left(v_1^{(k_n)}, v_2^{(k_n)}, \ldots, v_{N_n}^{(k_n)}\right)$ на відрізку $[0, l]$ та сформувати вектор $\tilde{v}^{(0)} = \left(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \ldots, v_{N_{n+1}}^{(0)}\right)$ значень згаданого інтерполянта у вузлах рівномірної сітки, що відповідає порядку дискретизації $N_{n+1}$.

7. Прийняти $n := n + 1$ та перейти до п. 1.

Алгоритм описано.

## Обмеження

З метою реалізації наведених чисельних алгоритмів було створено програму на мові програмування Java. Перевірка та візуалізація отриманих результатів здійснювалася з використанням спеціалізованої бібліотеки для роботи з Excel-файлами – XSSFWorkbook, та зокрема сам Microsoft Excel. Для роботи з даними у самій програмі використовується реалізація інтерфейсу List – ArrayList.

Враховуючи це, слід розуміти, що всі обмеження або неточності зумовлені насамперед архітектурою чи алгоритмами мови програмування Java або самої програми Microsoft Excel.

## Результати

Розглянемо задачу оптимального керування (3)–(6) з наступними вхідними даними:

$$l = 1, f(x) = 0.5x \cdot (1 - x) + 0.1, k(x) = 1 + 0.1x^2,$$
$$\varphi(x) = 0.5x \cdot (2 - x) + 0.1x,$$

де бажана точність обчислень становить $\varepsilon = 0.001$.

Граничні умови для функції $u(x)$ були задані наступні: $u(0) = 0, u(1) = 0.6$. Порядки дискретизації в алгоритмах модифікації були обрані такі: $N_1 = 10$, $N_{max} = 80$. У всіх проведених дослідженнях за початковий вектор було взято $\tilde{v}^{(0)} = 0.02$.

Спочатку наведемо результати обчислень для задачі (3)–(6) без обмежень на керування. При цьому кроковий множник обирався за допомогою методу дроблення кроку ($\lambda = 0.5$).

У табл. 1, 2 для всіх розглянутих випадків спостерігається однакова кількість ітерацій, близькі значення $J(v)$, $\|J'(v)\|$, $\|v(x)\|$ та менший затрачений час для модифікації градієнтного методу. Водночас цікавим є те, що для розглядуваної задачі керування зі збільшенням значення крокового множника зменшуються кількість ітерацій та час виконання обчислень. У роботі було досліджено використання значення крокового множника, що відповідає умові $\alpha \le 10$ (задавати більше значення $\alpha$ немає потреби, оскільки ціль задачі вже буде досягнута).

**Таблиця 1 – Результати при $C = 10, \alpha = 0.5$ (Джерело: розроблено авторами)**

| Метод | Кількість ітерацій | Затрачений час | Значення $J(v)$ | Значення $\|J'(v)\|$ | Значення $\|v(x)\|$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Градієнтний метод | 197 | 32 мс | 1.1054E-4 | 0.00197 | 0.5963 |
| Модифікація градієнтного методу | 1+1+ +4+191== 197 | 20 мс | 1.1054E-4 | 0.00197 | 0.5963 |

Зауважимо, що в проведених експериментальних дослідженнях усі обрані початкові значення $\alpha$ не змінювалися протягом виконання обчислень, тобто відразу виконувалася умова монотонного спадання функціонала.

Проаналізуємо також графічну візуалізацію отриманих результатів. На рис. 1 зображено порівняння функції бажаного розподілу температури $\varphi(x)$ із шуканою функцією розподілу

$u(x)$ згідно з табл. 1. Хоча модифікований та класичний підходи привели до графіків, які візуально не розрізняються, вони лише наближаються до бажаного розподілу, зображеного зеленою верхньою лінією.

**Таблиця 2 – Результати при $C = 10, \alpha = 10$ (Джерело: розроблено авторами)**

| Метод | Кількість ітерацій | Затрачений час | Значення $J(v)$ | Значення $\|\|J'(v)\|\|$ | Значення $\|\|v(x)\|\|$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Градієнтний метод | 26 | 10 мс | 8.4333E-6 | 8.2769E-5 | 0.6968 |
| Модифікація градієнтного методу | 3+6+ +7+10= = 26 | 4 мс | 8.4356E-6 | 8.4006E-5 | 0.6968 |

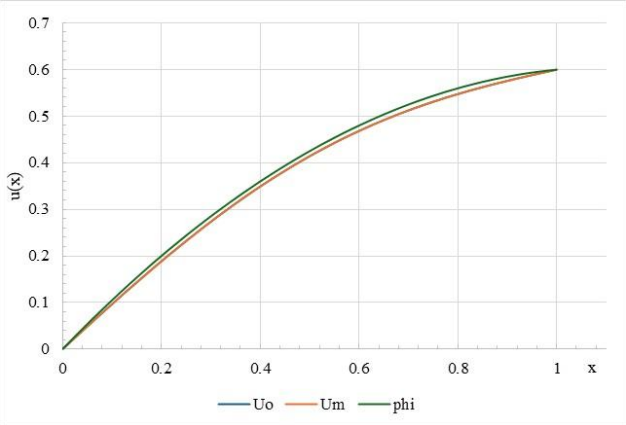


**Рисунок 1 – Порівняння функцій розподілу температури згідно табл. 1 (Створено авторами)**

Графіки керування, отримані модифікованим та класичним підходами, також візуально збігаються, що видно на рис. 2. Максимальне значення фіксується в діапазоні $0.8 \le v \le 0.9$. При цьому в обох випадках має місце полога монотонність спадання значень функціонала $J(v)$.

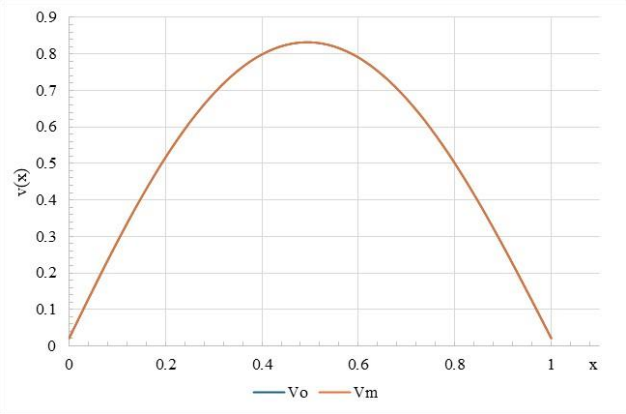


**Рисунок 2 – Порівняння керування згідно таблиці 1 (Створено авторами)**

Зі збільшенням значення крокового множника $\alpha$ візуально спостерігаються як досягнення бажаного розподілу температури (див. рис. 3), так і збіг поведінки функції керування (див. рис. 4). Водночас максимальне значення керування тепер фіксується в діапазоні $0.9 \le v \le 1$. У цьому випадку, класичний градієнтний метод демонструє занадто швидке спадання значень функціонала $J(v)$ на відміну від останнього етапу модифікованого методу, який демонструє стабільність обчислювального процесу та пологу монотонність спадання функціонала.

Отже, за серією проведених експериментів для розглядуваної задачі керування можна дійти висновку, що з огляду на кількість обчислювальних витрат та точність отримуваних наближених розв'язків в ітераційних алгоритмах градієнтного методу доцільніше використовувати для крокового множника значення $\alpha = 10$.

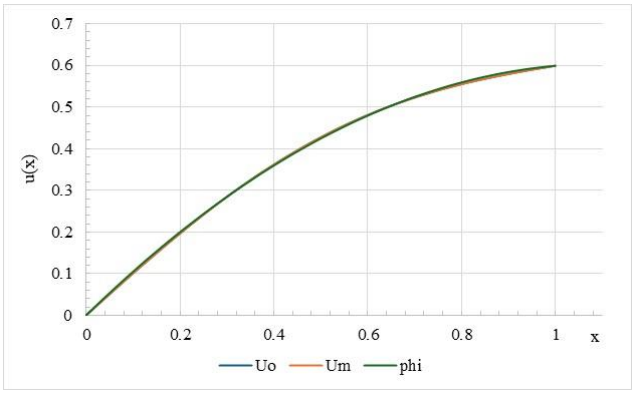


**Рисунок 3 – Порівняння функцій розподілу температури згідно табл. 2 (Створено авторами)**

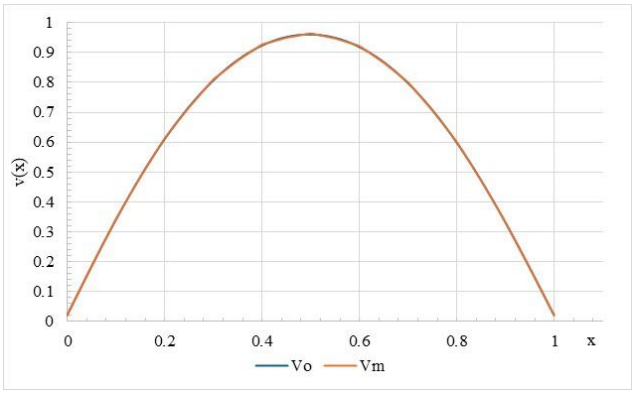


**Рисунок 4 – Порівняння керування згідно табл. 2 (Створено авторами)**

Розглянемо тепер для задачі (3)–(6) за вищеозначених вхідних даних випадок наявності обмеження на керування виду (7) при $v_{max} = 1$ і наведемо результати застосування методу умовного градієнта з дробленням кроку та його модифікації для її розв'язання. У табл. 3 наведено результати, що відповідають вхідному значенню крокового множника $\alpha = 0.5$, а в табл. 4 – значенню $\alpha = 1$.

**Таблиця 3 – Результати при $C = 10, \alpha \approx 0.004$ (Джерело: розроблено авторами)**

| Метод | Кількість ітерацій | Затрачений час | Значення $J(v)$ | Значення $\|\|J'(v)\|\|$ | Значення $\|\|v(x)\|\|$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Метод умовного градієнта | 25 | 21 мс | 1.664E-7 | 0.0019 | 0.7881 |
| Модифікація методу | 3 + 1+ +2+10= = 16 | 8 мс | 2.2133E-7 | 0.0019 | 0.78735 |

**Таблиця 4 – Результати при $C = 10, \alpha \approx 0.004$ (Джерело: розроблено авторами)**

| Метод | Кількість ітерацій | Затрачений час | Значення $J(v)$ | Значення $\|\|J'(v)\|\|$ | Значення $\|\|v(x)\|\|$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Метод умовного градієнта | 14 | 18 мс | 2.1664E-7 | 0.004 | 0.7923 |
| Модифікація методу | 3 + 1+ +2+13= = 19 | 9 мс | 1.4882E-7 | 0.004 | 0.8063 |

У першому випадку спостерігається перевага модифікованого методу як за кількістю ітерацій, так і за часом обчислень. У другому випадку модифікований метод показав сумарно більшу кількість ітерацій, але за менший час, оскільки частина ітерацій виконувалася для сіткових задач меншої розмірності. При цьому значення цільового функціонала та його градієнта в обох випадках співставні та мають однаковий порядок малості.

Слід зауважити, що дробленням крокового множника було досягнуто однакового значення $\alpha \approx 0.004$ для обох випадків,

однак доцільніше використовувати вхідне $\alpha$ меншим за одиницю ($0 < \alpha < 1$).

Візуалізація отриманих результатів демонструє збігання всіх трьох графіків розподілу температури (див. рис. 5), і це характерно для обох випадків.

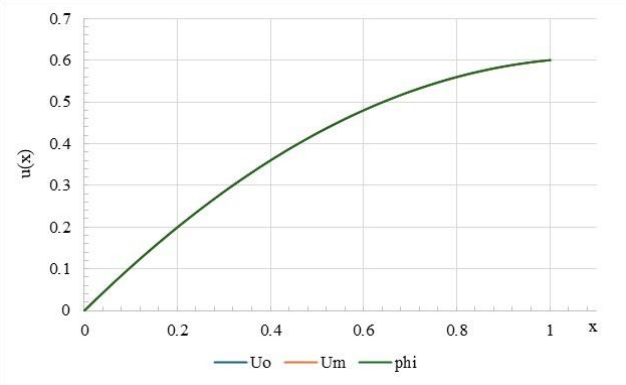


**Рисунок 5 – Порівняння функцій розподілу температури згідно табл. 3, 4 (Створено авторами)**

Графіки керування, отримані модифікованим та класичним підходами, відрізняються на рис. 6, 7, що можна пояснити, зокрема, вірогідністю існування неєдиного оптимального розв'язку в задачі оптимального керування з опуклим критерієм якості.

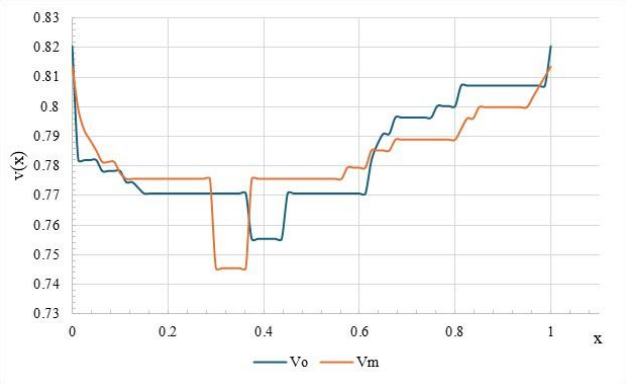


**Рисунок 6 – Порівняння керування згідно табл. 3 (Створено авторами)**

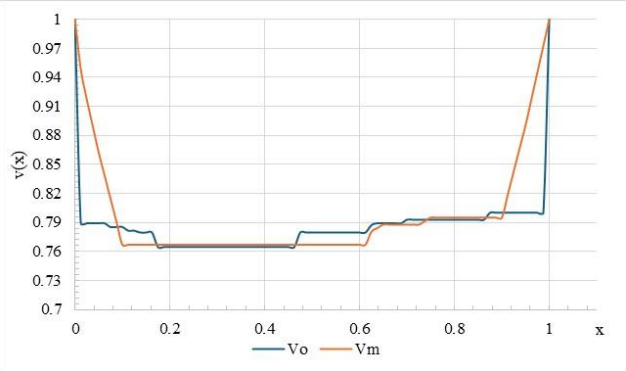


**Рисунок 7 – Порівняння керування згідно табл. 4 (Створено авторами)**

Водночас помічено, що функціонал, отриманий класичним підходом, спадає занадто швидко та приблизно з другої-третьої ітерації простягається в близькому околі нуля. Графічно це виглядає як пряма лінія за віссю абсцис.

Поведінка функціонала за модифікацією методу умовного градієнта, що представлена на рис. 8, 9, демонструє виконання умови монотонного спадання (значення функціонала на кожній з ітерацій виділені точками).

Якщо розглянути спосіб вибору значення крокового множника за правилом (11), то з табл. 5 видно, що модифікований метод умовного градієнта, як і раніше, потребує меншої кількості обчислювальних витрат. Проте наявне суттєве збільшення часу обчислень в обох алгоритмах, що можна пояснити трудомісткістю процесу розв'язання задачі (11).

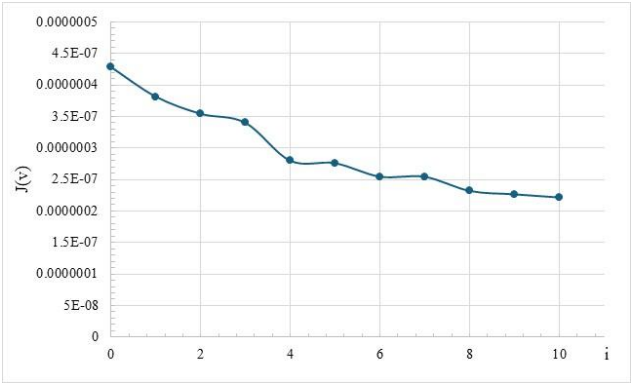


**Рисунок 8 – Поведінка $J(v)$ при модифікованому підході з табл. 3 (Створено авторами)**

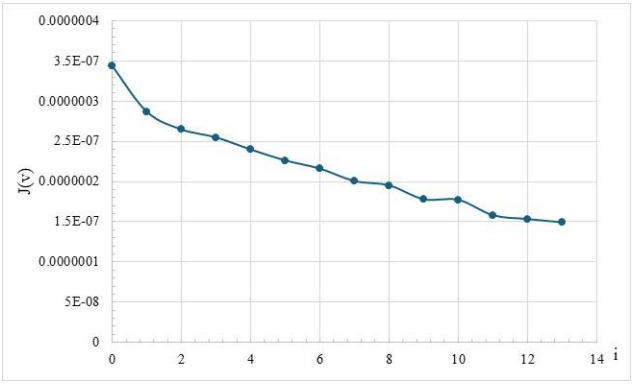


**Рисунок 9 – Поведінка $J(v)$ при модифікованому підході з табл. 4 (Створено авторами)**

**Таблиця 5 – Результати при $C = 10, \alpha_o = 0.004, \alpha_m = 0.003$ (Джерело: розроблено авторами)**

| Метод | Кількість ітерацій | Затрачений час | Значення $J(v)$ | Значення $\|\|J'(v)\|\|$ | Значення $\|\|v(x)\|\|$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Метод умовного градієнта | 12 | 402 мс | 1.8763E-7 | 1.115E-5 | 0.7867 |
| Модифікація методу | 2 + 1+ +1+10= = 14 | 256 мс | 1.64E-7 | 9.2024E-6 | 0.7875 |

У цьому випадку, всі три сіткові функції розподілу температури візуально збігаються і мають таку саму поведінку, як на рис. 5, а відповідні сіткові функції керування відрізняються за поведінкою.

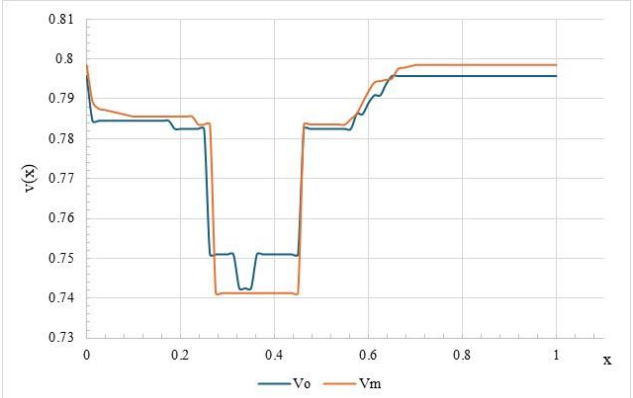


**Рисунок 10 – Порівняння керування згідно табл. 5 (Створено авторами)**

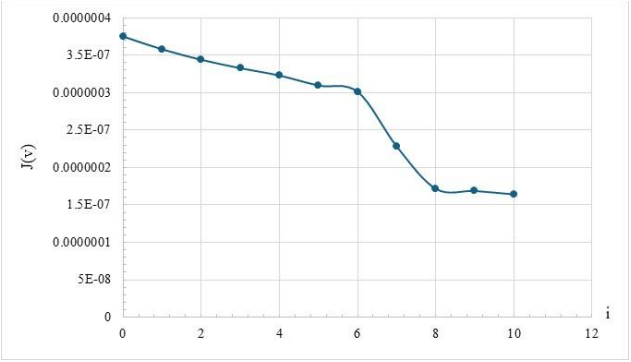


**Рисунок 11 – Поведінка $J(v)$ при модифікованому підході з табл. 5 (Створено авторами)**

Поведінка функціонала за класичного методу умовного градієнта подібна до попередніх результатів: стрімке спадання та продовження в околі нуля за віссю ординат. На рис. 11 показана поведінка функціонала за модифікацією цього методу, де спостерігаємо монотонне спадання протягом роботи всього циклу алгоритму.

Додатково пояснимо, що подані у таблицях значення для $\|J'(v)\|$, $\|v(x)\|$ обчислені за стандартними формулами сіткових норм (Samarskii, 2001), а на графіках використані такі позначення: $U_o$ – функція $u(x)$, отримана класичним методом градієнтного типу; $U_m$ – функція $u(x)$, отримана за модифікацією відповідного методу; $V_o$ – функція $v(x)$, отримана класичним методом градієнтного типу; $V_m$ – функція $v(x)$, отримана за модифікацією відповідного методу; $phi$ – функція $\varphi(x)$; $i$ – номер ітерації.

## Висновки

Проведені дослідження підтверджують доцільність застосування розглянутих апроксимаційно-ітераційних модифікацій методів градієнтного типу до розв'язання задач оптимального керування стаціонарними тепловими процесами та їх ефективність у порівнянні з класичними сітковими схемами. Однією з переваг застосування саме модифікованого підходу є стабільність процесу обчислень, зменшення кількості обчислювальних витрат та підвищення точності отримуваних наближених розв'язків. Окрім цього, дослідження показали ефективність використання способу дроблення крокового множника в алгоритмах розглянутих градієнтних методів. Водночас експерименти продемонстрували важливість вибору належних вхідних значень для крокового множника та початкового наближення в ітераційних процедурах для забезпечення їх практичної збіжності. Зазначимо, що для розглянутої модельної задачі без обмежень на керування спостерігалося зменшення кількості ітерацій при збільшені крокового множника, однак на загальний випадок така тенденція може не поширюватися. У зв'язку з цим оптимальні стратегії вибору параметрів у розглянутих алгоритмах градієнтного типу мають бути узгоджені з властивостями вихідної оптимізаційної задачі. Подальші дослідження авторів передбачають застосування запропонованого модифікованого підходу до розв'язання більш складних задач оптимального керування тепловими процесами, у тому числі нестаціонарними, багатовимірними та з фазовими обмеженнями.

## References

Abidi, S., & Satouri, J. (2023). New numerical method for solving optimal control problem for the stationary Navier-Stokes equations. *AIMS Mathematics, 8*(9), 21484–21500. https://doi.org/10.3934/math.20231095

Balashova, S. D. (1996). On solving minimization problems using projection-iterative methods [In Russian]. *Matematičeskie modeli i vyčislitel'nye metody v prikladnyh zadačah*, 99–104. https://e.surl.li/kdqhsa

Baldini, S., Barbi, G., Cervone, A., Giangolini, F., Manservisi, S., & Sirotti, L. (2025). Optimal Control of Heat Equation by Coupling FVM and FEM Codes. *Mathematics, 13*(2), 238. https://doi.org/10.3390/math13020238

Baranovskii, E. S., Brizitskii, R. V., & Saritskaia, Z. Yu. (2024). Boundary Value and Control Problems for the Stationary Heat Transfer Model with Variable Coefficients. *Journal of Dynamical and Control Systems, 30*(3). https://doi.org/10.1007/s10883-024-09698-w

Fontes, F. A. C. C., Halder, A., Becerril, J., & Kumar, P. R. (2019). Optimal Control of Thermostatic Loads for Planning Aggregate Consumption: Characterization of Solution and Explicit Strategies. *IEEE Control Systems Letters, 3*(4), 877–882. https://doi.org/10.1109/lcsys.2019.2918978

Gangl, P., Löscher, R., & Steinbach, O. (2025). Regularization and finite element error estimates for elliptic distributed optimal control problems with energy regularization and state or control constraints. *Computers & Mathematics with Applications, 180*, 242–260. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2024.12.021

Hart, E. (2017). *Models and projection-iterative modifications of the variational-grid methods in problems of elastic-plastic deformation of structurally inhomogeneous solids* [Doctoral dissertation, in Ukrainian, Oles Honchar Dnipro National University]. https://nrat.ukrintei.ua/en/searchdoc/0517U000726

Hart, L. (2013). Projection-iterative realization of the method of conditional gradient of functional minimizing in Hilbert space [In Russian]. *System research and information technologies*, (3), 104-117. http://journal.iasa.kpi.ua/article/view/44151

Hart, L. (2017). *Projection-iteration methods for solving operator equations and infinite-dimensional optimization problems* [Doctoral dissertation, in Ukrainian, Oles Honchar Dnipro National University]. https://nrat.ukrintei.ua/en/searchdoc/0517U000442

Hart, L. (2022). Combined Approach to Solving the Neumann Problem for a Parametric Quasilinear Elliptic Equation. In *International Symposium on Engineering and Manufacturing* (pp. 316-328). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-03877-8_28

Hart, L., & Yatsechko, N. (2021). Numerical algorithms for solving an elliptic optimal control problem with a power-law nonlinearity. *Artificial Intelligence, 26*(2), 64–76. https://doi.org/10.15407/jai2021.02.064

Hou, J., Li, X., Wan, H., Sun, Q., Dong, K., & Huang, G. (2022). Real-time optimal control of HVAC systems: Model accuracy and optimization reward. *Journal of Building Engineering, 50*, 104159. https://doi.org/10.1016/j.jobe.2022.104159

Hu, M., Song, H., Wu, J., & Yang, J. (2024). Inexact primal-dual active set iteration for optimal distribution control of stationary heat or cold source. *Journal of Global Optimization, 91*(1), 235–253. https://doi.org/10.1007/s10898-024-01437-6

Karwa, R. (2020). *Heat and mass transfer*. Springer Nature. https://books.google.com/books?id=4lXsDwAAQBAJ

Kien, B. T., Rösch, A., Son, N. H., & Tuyen, N. V. (2023). FEM for Semilinear Elliptic Optimal Control with Nonlinear and Mixed Constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications, 197*(1), 130–173. https://doi.org/10.1007/s10957-023-02187-3

Neittaanmaki, P., Sprekels, J., & Tiba, D. (2006). *Optimization of elliptic systems: Theory and applications* (Springer Monographs in Mathematics). Springer New York. https://doi.org/10.1007/b138797

Samarskii, A. A. (2001). *The theory of difference schemes*. CRC Press. https://doi.org/10.1201/9780203908518

Samarskiĭ, A. A., & Vabishchevich, P. N. (2007). *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics* (Vol. 52). Walter de Gruyter. https://books.google.com/books?id=9IjbSaVdNaoC

Titouche, S., Spiteri, P., Messine, F., & Aidene, M. (2015). Optimal control of a large thermic process. *Journal of Process Control, 25*, 50–58. https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2014.09.015

Vallejos, M. (2012). Multigrid methods for elliptic optimal control problems with pointwise state constraints. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications, 5*(1), 99-109. https://doi.org/10.4208/nmtma.2011.m12si06